

**Lezioni di**

# **MECCANICA QUANTISTICA**

**K. Konishi, G. Paffuti**

**Settembre 2004**

**Dipartimento di Fisica, Facoltà di Scienze M.F.N.**

**Università degli Studi di Pisa**



# Indice

<b>I Introduzioni</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduzione e concetti principali</b>	<b>9</b>
1.1 Introduzione . . . . .	10
1.2 Complementi di Meccanica Analitica . . . . .	15
1.2.1 Formalismo Lagrangiano . . . . .	15
1.2.2 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	16
1.2.3 Parentesi di Poisson . . . . .	18
1.2.4 Trasformazioni canoniche . . . . .	19
1.2.5 Equazioni di Hamilton-Jacobi . . . . .	21
1.2.6 Invariante adiabatico . . . . .	21
1.2.7 Teorema del Viriale . . . . .	22
1.3 Sviluppo Storico: Nascita della Meccanica Quantistica . . . . .	24
1.3.1 Radiazione del corpo nero e la formula di Planck . . . . .	24
1.3.2 Effetto fotoelettrico . . . . .	29
1.3.3 Modello atomico di Bohr . . . . .	30
1.3.4 Condizione di quantizzazione di Bohr e Sommerfeld; Onda di de Broglie . . . . .	31
1.3.5 Problemi . . . . .	32
<b>2 Princìpi della meccanica quantistica</b>	<b>35</b>
2.1 Princípi e Legge della Meccanica Quantistica . . . . .	36
2.1.1 Lo stato quantistico e il principio di sovrapposizione . . . . .	36
2.1.2 Princípio di indeterminazione di Heisenberg . . . . .	39
2.1.3 Operatori, autovalori e autostati, risultati di un'osservazione . . . . .	42
2.1.4 Risultati reali per una misura; Operatori Hermitiani . . . . .	44
2.1.5 Prodotti di operatori, Commutatori, Osservabili compatibili . . . . .	45
2.1.6 Operatori di posizione e di impulso, Commutatori fondamentali, Relazione di Heisenberg . . . . .	46
2.1.7 Evoluzione del sistema, Equazione di Schrödinger . . . . .	48
2.1.8 Spettro continuo; la funzione delta di Dirac; autostati di posizione .	50
2.1.9 Relazione di Completezza . . . . .	53
2.1.10 Autostati di posizione; autostati di impulso . . . . .	53
2.1.11 Problemi . . . . .	55
2.1.12 Complemento: Integrale nel piano complesso e teorema di residuo .	57
2.2 Equazione di Schrödinger: Proprietà Generali . . . . .	58
2.2.1 Proprietà generali dell'Equazione di Schrödinger; Teorema di Ehrenfest; Denitità e corrente di probabilità . . . . .	58
2.2.2 Equazione di Schrödinger in una dimensione . . . . .	61
2.2.3 Bucche di potenziale . . . . .	64
2.2.4 Oscillatore armonico . . . . .	68
2.2.5 Operatori di creazione e di distruzione . . . . .	73
2.2.6 Barriera di potenziale e Effetto tunnel . . . . .	75

2.2.7	Sistemi in uno spazio topologicamente non banale . . . . .	78
2.2.8	buca/barriera di potenziale con funzioni $\delta$ . . . . .	78
2.2.9	Applicazioni della buca infinitamente alta . . . . .	83
2.2.10	Dalla fisica di una particella alla fisica dei sistemi di molti gradi di libertà: Cristallo Unidimensionale . . . . .	84
2.3	Potenziale periodico e struttura di bande d'energia . . . . .	86
2.3.1	Esempio di simmetria: parità della funzione d'onda; doppia buca .	88
2.3.2	Problemi . . . . .	89
2.4	Complemento sul sistema con il potenziale $g\delta(x)$ . . . . .	90
2.4.1	Spettro discreto . . . . .	90
2.4.2	Spettro continuo . . . . .	90
2.4.3	Ortogonalità tra lo stato discreto e uno stato nel continuo . . . . .	91
2.4.4	Ortogonalità tra gli stati del continuo . . . . .	91
2.4.5	Completezza . . . . .	92
<b>3</b>	<b>Aspetti formali della meccanica quantistica</b> . . . . .	<b>95</b>
3.1	Rappresentazione delle coordinate e degli impulsi . . . . .	96
3.2	Bra e Ket, Spazio di Hilbert dei vettori . . . . .	97
3.2.1	Operatori autoaggiunti, variabili dinamiche e lo spettro . . . . .	100
3.3	Trasformazioni unitarie . . . . .	102
3.3.1	Schema di Schrödinger e schema di Heisenberg . . . . .	103
3.3.2	Oscillatore armonico . . . . .	104
3.4	Stati misti e matrice densità . . . . .	105
3.4.1	Polarizzazioni del fotone . . . . .	109
3.5	Funzioni di Green . . . . .	110
<b>4</b>	<b>Teoria del momento angolare e Sistemi Tridimensionali</b> . . . . .	<b>113</b>
4.1	Momento Angolare . . . . .	114
4.1.1	Introduzione . . . . .	114
4.1.2	Definizione e regole di commutazione . . . . .	114
4.1.3	Momento angolare come generatore di rotazioni . . . . .	116
4.1.4	Autovalori del momento angolare . . . . .	117
4.1.5	Momento angolare orbitale; funzioni armoniche sferiche . . . . .	120
4.1.6	Elementi di matrice di $\mathbf{J}$ . . . . .	122
4.1.7	Composizione dei momenti angolari . . . . .	125
4.1.8	Coefficienti di Clebsch-Gordan . . . . .	128
4.1.9	Spin . . . . .	129
4.1.10	Matrici di rotazione: spin $\frac{1}{2}$ . . . . .	131
4.1.11	Teorema di Wigner-Eckart . . . . .	132
4.2	Polinomi di Legendre . . . . .	133
4.3	Gruppi e Rappresentazioni: Elementi di Teoria dei Gruppi . . . . .	135
4.3.1	Assiomi del gruppo e alcuni esempi . . . . .	135
4.3.2	Rappresentazione del Gruppo . . . . .	136
4.3.3	Gruppo di Lie e Algebra di Lie . . . . .	137
4.4	Simmetrie in Meccanica Quantistica . . . . .	140
4.4.1	Considerazioni generali . . . . .	140
4.4.2	Parità ( $\mathcal{P}$ ) . . . . .	141
4.4.3	Inversione del tempo (time reversal) . . . . .	142
4.5	Sistemi in Tre Dimensioni . . . . .	145
4.5.1	Massa ridotta . . . . .	145
4.5.2	Moto in campo a simmetria centrale . . . . .	145
4.5.3	Onde sferiche . . . . .	146
4.5.4	Stati legati in una buca di potenziale tridimensionale . . . . .	149
4.5.5	Atomo di idrogeno . . . . .	150

4.6	Problemi	154
4.7	Particelle cariche in campi elettromagnetici	159
4.8	Effetto Aharonov-Bohm	159
4.9	Disuguaglianze di Bell, Disuguagliaza di CHSH e Quantum Entanglement	165
4.9.1	Problema	165
4.9.2	Dimostrazione	166
4.9.3	Copie di fotoni correlati	167



# **Parte I**

# **Introduzioni**



## **Capitolo 1**

# **Introduzione e concetti principali**

## 1.1 Introduzione

Il comportamento delle particelle quantistiche è in molti aspetti straordinario, dal punto di vista delle nostre esperienze quotidiane, siano esse un elettrone, un protone, un atomo o una molecola. Discuteremo qui alcuni esempi.

### 1) Diffrazione e Interferenza

L'aspetto più caratteristico del comportamento “non classico” dell'elettrone è quello della diffrazione e dell'interferenza, ambedue tipico di un'onda.

Come è ben noto, la luce è un'onda, l'onda elettromagnetica, e come tale esibisce molti fenomeni caratteristici. Prendiamo in esame la famosa esperienza di Young (1801) in cui la luce di una lampada viene fatta attraversare una doppia fenditura, facendo poi incidere su uno schermo fotografico. Le immagini di frange di intensità regolari e alternate osservate in tale esperimento (Fig. 1.2) possono essere interpretate come conseguenza dell'interferenza di due raggi, passati da due fenditure diverse. Infatti, se la distanza tra le fenditure, la distanza tra la fenditura e lo schermo, la posizione verticale del punto sullo schermo sono date rispettivamente da  $d$ ,  $L$ ,  $x$  (vedi Fig. 1.1), allora l'angolo della diffrazione è circa (assumendo  $d \ll L; x \ll L$ )  $\theta \sim x/L$ , perciò la differenza del percorso tra i due raggi è data da

$$\Delta d \simeq d \sin \theta \simeq d\theta \simeq dx/L.$$

Se la lunghezza d'onda della luce è  $\lambda$ , la condizione per l'interferenza positiva è

$$\Delta d/\lambda = n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

mentre per  $x$  tale che

$$\Delta d/\lambda = n + 1/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

si avrà interferenza distruttiva. Nell'esperimento di Young,  $L/d \sim 10^3$ ;  $\lambda \sim 10^3 \text{ \AA} = 10^{-5} \text{ cm}$ , perciò tipicamente la spaziatura delle frange è dell'ordine di  $0.1 \text{ mm}$ .

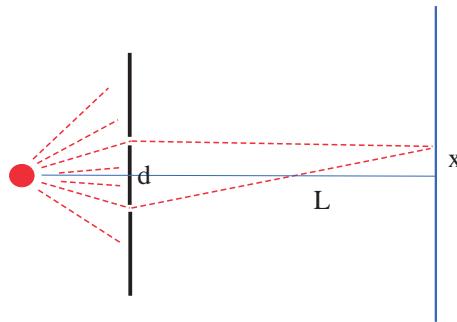


Figura 1.1: Esperienza di Young

Nel caso di elettroni, un'analoga esperienza è (per motivi tecnici) divenuta possibile solo qualche anno fa (1989). È da notare che tale esperienza è spesso qualificata nei libri

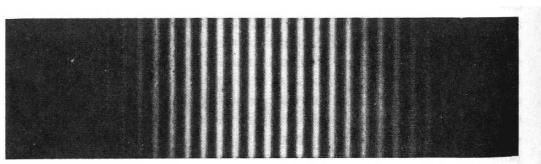


Figura 1.2: La frange di interferenza nell'esperimento à la Young con la luce visibile

di meccanica quantistica come “Gedanken experiment”, cioè una esperienza “pensata” o “ipotetica”. Non lo è più.

La figura presa da un articolo di Tonomura et.al. (Am. Journ. Phys. 57 (1989)117) qui accanto dimostra una straordinaria somiglianza con la precedente Fig. 1.2 dell’esperienza di Young. Ad un’analisi più attenta, però, si può cogliere qualche differenza.

La prima differenza riguarda la scala. Nel caso dell’esperienza con la luce visibile la spaziatura delle frange d’interferenza era dell’ordine del mm, mentre nel caso degli elettroni è dell’ordine di  $10^{-4}$ mm. Questa differenza - quantitativa ma non qualitativa - non è concettualmente essenziale, ma comporta notevoli difficoltà tecniche che sono state le ragioni per cui questa esperienza è stata realizzata soltanto di recente.

La differenza più importante, apparentemente, è il fatto che gli elettroni sono particelle (mentre la luce è “ovviamente” un’onda), con la massa e la carica elettrica ben definite: infatti non è difficile distinguere i punti lasciati da singoli elettroni sullo schermo nell’esperienza di Tonomura et. al.

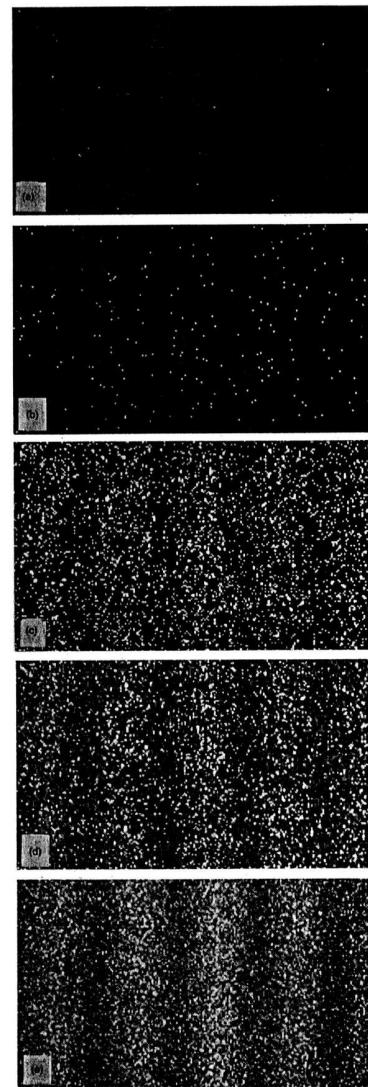
In questo esperimento è stato usato un fascio di elettroni di intensità molto ridotta,  $\sim 10^3$  / sec. Tenendo conto della velocità media dell’elettrone,  $\sim 0.4c$ , la distanza media tra due elettroni è circa  $\sim 150$  Km, mentre l’intero apparecchio sperimentale ha una dimensione di circa 1.5m. È ragionevole, in tali condizioni, pensare che gli elettroni arrivino “uno ad uno”, senza interagire tra di loro in maniera significativa. Le cinque immagini corrispondono, rispettivamente, a 10, 100, 3000, 20000 e 70000 elettroni.

Arriviamo quindi ad una conclusione apparentemente paradossale. Il singolo elettrone in qualche maniera “vede” le due fenditure, le sue due fronti d’ona differenti interferiscono! Questa proprietà è nota come “dualità onda-corpuscolo”. È di fondamentale importanza il fatto che tale dualità si riferisce ai singoli elettroni, e non ad una proprietà collettiva del fascio degli elettroni.

Con recenti sviluppi tecnologici, anche l’esperienza di Young originale può essere ripetuta con un fascio di fotoni molto debole, di modo che i fotoni arrivino uno a uno. Col senso di poi, ci si rende conto che non esiste nessuna differenza sostanziale tra l’esperienza di Young con i fotoni e quella di Tonomura et.al. fatta utilizzando un fascio di elettroni. Risulta infatti (de Broglie) che *tutte* le particelle elementari, atomi e molecole, posseggono tale proprietà duale. Come vedremo in seguito Meccanica Quantistica descrive queste particelle con un linguaggio matematico coerente e molto elegante.

## 2) La stabilità e l’identità degli atomi.

Il secondo aspetto riguarda la stabilità e l’assoluta identità di atomi (dello stesso tipo). Consideriamo l’atomo di idrogeno, che è uno stato legato formato da un elettrone e un protone. Il moto dell’elettrone intorno al nucleo è descritto, nella meccanica di Newton,



dall'equazione,

$$m\ddot{r} = -\frac{e^2}{r^2} + mr\dot{\theta}^2, \quad (1.2)$$

dove abbiamo assunto un moto circolare per semplicità. Come è noto l'eq.(1.2) ammette una soluzione stabile,  $r = \text{costante}$ . Nel mondo attuale, tuttavia, esistono altri effetti dovuti alle interazioni elettromagnetiche (la forza statica Coulombiana tenuta in conto nella (1.2) ne è una delle manifestazioni fra tante). Infatti, secondo la teoria classica di Maxwell, una particella carica in un moto accelerato emette luce e perde l'energia. Per l'elettrone che si muove con accelerazione  $\ddot{r}$  l'energia persa per un intervallo unitario di tempo è:

$$S = \frac{2e^2}{3c^3}(\dot{v})^2 \quad (\text{erg/sec}) \quad (1.3)$$

(vedi Landau-Lifshitz Vol. 2). Supponiamo che la perdita di energia sia piccola di modo che l'orbita possa essere considerata approssimativamente circolare, e calcoliamo in quanto tempo un atomo di raggio  $r \simeq 10^{-8}\text{cm}$  collassa ad un punto.

Poniamo dunque

$$r(t = 0) = 10^{-8} \quad \text{cm.} \quad (1.4)$$

Da l'eq(1.2) si ha

$$\frac{e^2}{r^2} \simeq mr\dot{\theta}^2 = m|\dot{v}|, \quad (1.5)$$

o

$$|\dot{v}| = \frac{e^2}{mr^2}. \quad (1.6)$$

Sostituendo questo in (1.3), si trova

$$S = -\frac{dE}{dt} = \frac{2e^6}{3m^2c^3r^4}. \quad (1.7)$$

Ma per un moto circolare vale la relazione:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}, \quad (1.8)$$

perciò

$$r^2\ddot{r} = -\frac{4e^4}{3m^2c^3}. \quad (1.9)$$

Integrando e ponendo  $r(t) = 0$  si ha

$$r(0)^3 - \frac{4e^4}{m^2c^3}t = 0,$$

$$t = \frac{m^2c^3}{4e^4}(10^{-8})^3 \simeq 10^{-10} \quad \text{sec.} \quad (1.10)$$

Secondo la fisica classica dunque un atomo di idrogeno collassa ad un punto in  $10^{-10}\text{sec}$ ! Questo non è certamente quello che accade in Natura.

Pur ammettendo che ci possa essere una ragione sconosciuta per cui la (1.3) non si applichi al mondo atomico - dopotutto la teoria di Maxwell è stata scoperta nel mondo macroscopico - e quindi trascurando le difficoltà che ne seguono, c'è un altro problema molto serio per un modello "planetario" degli atomi come descritto da (1.2). La difficoltà sta nel fatto che ogni atomo dovrebbe avere un raggio diverso, un raggio che dipende dalla condizione al contorno (condizione iniziale).

Come vedremo in seguito, in meccanica quantistica tutti i moti (classicamente) periodici sono "quantizzati": solo alcuni "stat" sono permessi. Di conseguenza due atomi dello

stesso tipo (nel loro stato normale) hanno proprietà *rigorosamente identiche*. La “quantizzazione” del moto risolve in modo naturale anche il problema dell’instabilità dell’atomo accennato sopra.

È facile capire la ragione per la quale l’eq.(1.2) non può avere una soluzione con un raggio ben definito (che non dipenda da una condizione iniziale accidentale). Gli unici parametri che appaiono nell’equazione sono  $m$  e  $e$  con dimensioni (in unità *cgs*)

$$m = [\text{gr}]; \quad e = [\text{gr}^{1/2} \text{cm}^{3/2} \text{sec}^{-1}] :$$

è ovviamente impossibile formare, tramite una loro combinazione, alcuna costante con la dimensione di una lunghezza. In Meccanica Quantistica esiste una costante fondamentale della natura chiamata costante di Planck ( $\hbar$ ) con dimensione

$$\hbar = [\text{gr} \cdot \text{cm}^2 / \text{sec}] ;$$

questa costante caratterizzerà l’intera costruzione della Meccanica Quantistica.

Infatti, avendo a disposizione anche  $\hbar$ , si può trovare un’unica combinazione

$$r_B = \frac{\hbar^2}{m e^2} \quad (1.11)$$

chiamato “raggio di Bohr.” Con i valori numerici noti si ottiene

$$r_B \simeq 5 \cdot 10^{-9} \text{ cm} \quad (1.12)$$

che è ragionevole come grandezza di un atomo.

L’assoluta identità delle proprietà intrinseche di due atomi (o più in generale, di due particelle elementari - due protoni, due elettroni, ecc.) della stessa specie, è la base della regolarità e stabilità del mondo macroscopico (cristalli, sistemi biologici, ecc.) Senza tale esattezza il fenomeno biologico (riproduzione e metabolismo) sarebbe impossibile. Tale aspetto del mondo microscopico è in chiaro contrasto, ma in certo senso in armonia, con le infinite varietà dei fenomeni macroscopici.

### 3) Effetto Tunnel

Il terzo esempio è il fenomeno della conduzione elettrica. In un modello semplificato l’elettrone nel metallo è rappresentato da una particella che si muove in un potenziale periodico (Fig.1.3). Secondo la meccanica classica la particella si sposterà nel campo elettristatico ma non riuscirà ad attraversare le barriere di potenziale (se il campo esterno, che provoca il suo movimento, non è sufficientemente forte). In meccanica quantistica, l’elettrone è capace di attraversare la barriera anche se ha energia insufficiente dal punto di vista classico (“effetto tunnel”), permettendo così la conduzione elettrica osservata quotidianamente. L’effetto tunnel è collegato strettamente con la dualità onda-corpuscolo delle particelle.

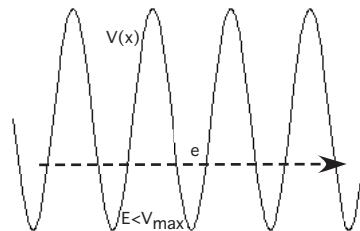


Figura 1.3: Potenziale periodico

Ricapitolando, la meccanica classica di Newton non può descrivere il mondo regolare in cui viviamo. Tale struttura richiede l’assoluta identità degli atomi dello stesso tipo, e

questo è possibile soltanto in Meccanica Quantistica dove l'equazione contiene una nuova costante fondamentale dimensionale. Inoltre l'elettrone e tutte le altre particelle elementari, nuclei, atomi e molecole esibiscono una doppia caratteristica “onda-corpuscolo”: la quantizzazione dei moti periodici e il fenomeno del “tunnelling” sono strettamente legati a questa proprietà. La Meccanica Quantistica descrive questi comportamenti (e molti altri!) in modo coerente e con un formalismo matematico molto elegante.

## 1.2 Complementi di Meccanica Analitica

### 1.2.1 Formalismo Lagrangiano

L'equazione di Newton per una particella è

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F} \quad (1.13)$$

dove  $\mathbf{p}$  è l'impulso (la quantità di moto);  $\mathbf{F}$  è la forza cui la particella in questione è sottoposta. Nel caso in cui la forza è di tipo conservativo,

$$\mathbf{F} = -\nabla V \quad (1.14)$$

dove  $V$  è il potenziale. Dalle eqs. (1.13) e (1.14) segue la legge di conservazione dell'energia totale

$$E = T + V; \quad T = \mathbf{p}^2/2m = m\dot{\mathbf{r}}^2/2 \quad (\text{energia cinetica}). \quad (1.15)$$

Inoltre, se il potenziale è a simmetria sferica,

$$V(\mathbf{r}) = V(r)$$

è conservato anche il momento angolare  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ .

Nel formalismo Lagrangiano della meccanica di Newton, la quantità fondamentale è la Lagrangiana

$$L = L(q_i, \dot{q}_i; t) = T - V$$

considerata come una funzione delle coordinate generalizzate  $q_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , delle loro derivate temporali  $\dot{q}_i$ , e del tempo  $t$ . Data la Lagrangiana, l'equazione del moto è:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

(eq. di Eulero-Lagrange). L'equazione di Eulero-Lagrange segue (vedi Appendice) dal *principio di minima azione*. Ovvero imponendo che l'azione sia minima rispetto alla variazione arbitraria delle funzioni  $q_i(t)$ , con la condizione che i loro valori, ai tempi iniziali e finali  $q_i(t_1)$ ,  $q_i(t_2)$ , siano tenuti fissi. In formule:

$$\delta S|_{\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0} = 0, \quad (1.17)$$

dove

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i; t). \quad (1.18)$$

La dimostrazione 'e data in Appendice A.

Note: Il valore dell'azione dipende dalla traiettorie, o funzioni,  $q_i(t)$ . In altre parole,  $S$  è una *funzionale* di  $q_i(t)$ , generalizzando il concetto di una funzione.

#### Osservazioni

- L'equazione di Eulero-Lagrange è invariante (in forma) per cambiamenti arbitrari delle coordinate generalizzate,  $q_i(t) \rightarrow Q_i(t) = Q_i(\{q_i(t)\}; t)$ . (Esercizio: verificate-lo.) Queste trasformazioni sono chiamate *trasformazioni puntuali*.
- L'introduzione del concetto dei moti fittizi nel formalismo Lagrangiano e la formulazione del principio di minima azione, risultano molto proficui per i successivi sviluppi in fisica teorica. (Sistemi relativistici, teoria dei campi, il formalismo dell'integrale sui cammini di Feynman della Meccanica Quantistica, ecc.)

- La Lagrangiana per un dato sistema fisico non è univoca, ma ha un'arbitrarietà del tipo,

$$L(q, p; t) \rightarrow L(q, p; t)' = L(q, p; t) + \frac{dF(q, t)}{dt}. \quad (1.19)$$

Infatti, l'azione cambia secondo la relazione

$$S \rightarrow S' = S + F(q_2, t_2) - F(q_1, t_1); \quad (1.20)$$

ma allora segue, ricordando la condizione al contorno  $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$ , che

$$\delta S' = \delta S. \quad (1.21)$$

### Esercizio

Scrivere la Lagrangiana per una particella con carica elettrica  $q$  che si muove in un campo elettromagnetico esterno. Dimostrare che la nota espressione per la forza di Lorentz segue dall'equazione di Eulero-Lagrange (1.16).

### Risposta

$$L = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{A} - q\phi(\mathbf{r}). \quad (1.22)$$

dove

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.23)$$

L'ultimo termine è semplicemente l'energia elettrostatica. L'equazione di Eulero-Lagrange dà

$$m\ddot{r}_i + \frac{q}{c}\dot{A}_i = -q\partial_i\phi + \frac{q}{c}\dot{r}_j\partial_iA_j. \quad (1.24)$$

Scrivendo il primo termine come

$$m\ddot{r}_i + \frac{q}{c}\dot{r}_j\partial_jA_i, \quad (1.25)$$

e raccogliendo termini, si ha

$$m\ddot{r}_i = -q\partial_i\phi + \frac{q}{c}\dot{r}_j(\partial_iA_j - \partial_jA_i) = -q\partial_i\phi + \frac{q}{c}\dot{r}_j\epsilon_{ijk}B_k = -q\partial_i\phi + \frac{q}{c}(\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B})_i. \quad (1.26)$$

Il potenziale vettoriale  $\mathbf{A}$  e il potenziale scalare  $\phi$  sono definiti a meno di trasformazioni di gauge

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f; \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}; \quad (1.27)$$

sotto le quali  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  sono invarianti, mentre la Lagrangiana di trasforma di

$$\Delta L = \frac{q}{c}\frac{df(r(t), t)}{dt}. \quad (1.28)$$

In virtù di quanto è stato osservato nell'ultimo punto l'equazione di moto rimane invariante per tali trasformazioni.

### 1.2.2 Formalismo Hamiltoniano

Nel formalismo Lagrangiano le variabili indipendenti sono le coordinate  $q_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ . Infatti si ottiene una descrizione completa di un sistema ad  $s$  gradi di libertà risolvendo  $s$  equazioni differenziali del secondo ordine. Nell'equazione di Eulero-Lagrange le derivate parziali sono prese come se  $q_i$  e  $\dot{q}_i$  fossero indipendenti, ma questo è solo un aspetto formale. Infatti, nel derivare l'equazione di Eulero-Lagrange, le variazioni considerate indipendenti sono solo le  $\delta q_i$ , mentre  $\delta \dot{q}_i(t) \equiv (d/dt)\delta q_i(t)$ .

Nel formalismo Hamiltoniano (detto “canonico”), il numero delle variabili indipendenti è raddoppiato ( $2s$ ). Le coordinate  $q_i$  e gli impulsi coniugati  $p_i$  sono ambedue variabili indipendenti, e in più appaiono in maniera (quasi) simmetrica nell’equazione del moto. L’Hamiltoniana è definita da: ((1.29) ‘è un esempio di *trasformazione di Legendre*.)

$$H(q_i, p_i) \equiv \sum_i p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i), \quad (1.29)$$

dove

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.30)$$

È inteso che l’eq.(1.30) è risolta per  $\dot{q}_i$ :

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(p_j, q_j)$$

e che la dipendenza di  $H$  da  $q_i, p_i$  al primo membro di (1.29) è intesa in tal senso. Le equazioni del moto che seguono da (1.29) e dall’equazione di Eulero-Lagrange sono:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, \dots, s), \quad (1.31)$$

(*equazioni di Hamilton o equazioni canoniche*).

### Osservazioni

- Nell’esempio semplice  $L = (1/2)m\mathbf{r}^2 - V$ ,  $H$  è data da

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V :$$

l’Hamiltoniana rappresenta l’energia del sistema.

- Le equazioni canoniche sono invarianti per una classe molto grande delle trasformazioni delle variabili

$$\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i(q, p), P_i(q, p)\},$$

dette *trasformazioni canoniche*.

- Sebbene il numero delle equazioni sia raddoppiato rispetto al formalismo Lagrangiano, esse sono ora equazioni differenziali (in  $t$ ) del primo ordine: il numero delle condizioni al contorno ( $2s$ ) è invariato rispetto al formalismo Lagrangiano ( $s$  equazioni del secondo ordine).

- Lo stato del sistema è specificato da un punto nell’iperspazio  $2s$ – dimensionale  $\{q, p\}$  ( *spazio delle fase* ); l’evoluzione del sistema è rappresentata dal movimento del punto in esso.

### Esercizio

Scrivere l’Hamiltoniano per una particella carica che si muove in un campo elettromagnetico esterno  $\phi(\mathbf{r}), \mathbf{A}(\mathbf{r})$ .

### Risposta

Il moto di una particella carica ( $q$ ) in un campo elettromagnetico  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  è descritto dall’Hamiltoniana

$$H = [\mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)]^2 + q\phi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}), \quad (1.32)$$

dove  $V$  è il potenziale meccanico.

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (1.33)$$

Per trasformazioni di gauge (1.27)  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  sono invarianti. L'Hamiltoniana non è invariante, ma si può dimostrare che esiste una trasformazione canonica (vedi (1.52) sotto) che riporta le equazioni di moto nella forma originale. (Dimostratelo).

L'equazione di moto che segue è

$$m\ddot{\mathbf{r}} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \quad (1.34)$$

con il noto termine di forza di Lorentz. Le interazioni con il campo vettoriale, rappresentata da una sostituzione formale  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  nel termine cinetico, è noto come interazioni (o l'accoppiamento) minimali.

### 1.2.3 Parentesi di Poisson

L'evoluzione temporale di una variabile generica nel formalismo Hamiltoniano viene elegantemente descritto in termini delle *parentesi di Poisson*. La parentesi di Poisson tra due variabili generiche  $f = f(q_i, p_i; t)$ ,  $g = g(q_i, p_i; t)$  è definita come

$$\{f, g\} \equiv \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (1.35)$$

L'evoluzione di una variabile  $f$  è

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'equazione del moto di una quantità fisica qualsiasi è dunque data - a parte la dipendenza esplicita dovuta ad eventuali parametri esterni - dalla sua parentesi di Poisson con l'Hamiltoniana.

Dalle equazioni canoniche seguono le parentesi di Poisson fondamentali:

$$\begin{aligned} \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}; \\ \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Alcune proprietà principali della parentesi di Poisson sono:

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= -\{g, f\}; \\ \{q_i, f\} &= \partial f / \partial p_i; \\ \{p_i, f\} &= -\partial f / \partial q_i; \\ \{f, c\} &= 0 \quad (c = \text{cost.}); \\ \{f_1 + f_2, g\} &= \{f_1, g\} + \{f_2, g\}; \\ \{f_1 f_2, g\} &= f_1 \{f_2, g\} + f_2 \{f_1, g\} \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0 \quad (\text{Identità di Jacobi}). \quad (1.39)$$

#### Esercizio

- Dimostrare che se  $f$  e  $g$  sono costanti del moto, lo è anche  $\{f, g\}$ . (Teorema di Poisson).
- Dimostrare che il volume nello spazio di fase occupato da stati tra  $(q_i, p_i)$  e  $(q_i + \delta q_i, p_i + \delta p_i)$  rimane invariante durante l'evoluzione temporale dei sistemi. (Teorema di Liouville).

### 1.2.4 Trasformazioni canoniche

Il formalismo canonico ammette un'ampia classe di variabili. I cambiamenti di variabile del tipo,

$$\{q_i, p_i\} \rightarrow \{Q_i(q, p; t), P_i(q, p; t)\} \quad (1.40)$$

che lasciano invariata la forma delle equazioni canoniche, i.e., tale che

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P_i}; \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q_i}, \quad (i = 1, \dots, s), \quad (1.41)$$

seguono dalle equazioni (1.31), sono chiamate *trasformazioni canoniche*.

Per studiare quali trasformazioni hanno questa proprietà, e qual'è la relazione tra l'Hamiltoniana originale e quella nuova, possiamo ripartire dal metodo variazionale. L'azione può essere riscritta come

$$S = \int L dt = \int (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt, \quad (1.42)$$

e l'equazione del moto segue dal principio di minima azione

$$\begin{aligned} 0 = \delta S &= \int [\sum_i (\delta p_i \dot{q}_i + p_i \frac{d}{dt} \delta q_i) - \sum_i (\frac{\partial H}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i)] dt \\ &= \int [\sum_i (\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}) \delta p_i + \sum_i (-\dot{p}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}) \delta q_i] dt. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Ricordando che, nel formalismo canonico,  $\delta q_i$  e  $\delta p_i$  sono indipendenti le equazioni canoniche seguono da quest'ultimo.

Una trasformazione *canonica* deve essere allora tale che

$$\begin{aligned} S &= \int dt (\sum p_i \dot{q}_i - H) \\ &= \int dt (\sum P_i \dot{Q}_i - \tilde{H} + \frac{dF}{dt}) \end{aligned} \quad (1.44)$$

dove  $F$  è una funzione delle coordinate, degli impulsi e di  $t$ . Supponiamo che  $F$  sia del tipo,

$$F = F_1(q, Q; t). \quad (1.45)$$

Poiché

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i (\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i) + \frac{\partial F_1}{\partial t}, \quad (1.46)$$

le relazioni tra le variabili nuove e quelle vecchie si trovano uguagliando i due membri di (1.44):

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_i}; \quad (1.47)$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_i}; \quad (1.48)$$

$$\tilde{H}(Q, P) = H(q, p) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}. \quad (1.49)$$

L'equazione (1.47) va risolta per  $p_i$ , dando  $p_i = p_i(q, Q; t)$ , mentre la (1.48) dà  $q_i = q_i(Q, P; t)$  che, sostituito nella prima relazione dà  $p_i = p_i(q, Q; t) = \tilde{p}(Q, P; t)$ . La (1.49) infine dà la nuova Hamiltoniana.

In breve, data una arbitraria funzione  $F_1(q, Q; t)$ , il cambiamento delle variabili e dell'Hamiltoniana definito da (1.47), (1.48) e (1.49), è tale che le equazioni in termini di

nuove variabili sono le (1.41). La funzione  $F_1(q, Q)$  è detta *funzione generatrice* della trasformazione.

Esempio:  $F_1 = \sum_i q_i Q_i$ .

In questo caso si ottengono  $p_i = Q_i$ ;  $P_i = -q_i$ ;  $\frac{\partial F_1}{\partial t} = 0$  e quindi  $\tilde{H}(Q_i, P_i) = H(q_i, p_i) = H(-P_i, Q_i)$ . È da notare che in questa trasformazione, il ruolo delle coordinate e gli impulsi è stato scambiato!

Ci sono altre specie di trasformazioni canoniche, classificate secondo il tipo della funzione generatrice usata,

$$F_2(q, P; t); \quad F_3(p, Q; t); \quad F_4(p, P; t); \quad (1.50)$$

i.e., secondo la dipendenza da nuove o vecchie variabili. La trasformazione della seconda specie può essere introdotta attraverso quella della prima specie,

$$\begin{aligned} F_2(q, P; t) &= F_1(q, Q; t) + \sum_i Q_i P_i; \\ P_i &\equiv -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

La trasformazione in questo caso è:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial q_i}; \\ Q_i &= \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial P_i}; \\ \tilde{H}(Q, P) &= H(q, p) + \frac{\partial F_2(q, P, t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

**Esempio 1:**  $F_2 = \sum_i \Phi_i(q, t) P_i$

Questo corrisponde alle trasformazioni puntuali,  $Q_i = \Phi_i(q, t)$ .

**Esempio 2:**  $F_2 = \sum_i q_i P_i$

Questo corrisponde alla trasformazione identica,  $Q_i = q_i$ ;  $p_i = P_i$ ;  $\tilde{H} = H$ , come è facile verificare.

**Esempio 3:**  $F_2 = \sum_i q_i P_i + \epsilon \psi(q, P)$ , con  $\epsilon \ll 1$ . (*Trasformazioni infinitesime*)

Le (1.52) danno luogo alla trasformazione (ritenendo fino all'ordine  $O(\epsilon)$ ),

$$\begin{aligned} Q_i &\simeq q_i + \frac{\partial \psi}{\partial P_i} \simeq q_i + \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial p_i} \\ p_i &\simeq P_i + \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \simeq P_i + \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (1.53)$$

cioè,

$$\delta q_i = \frac{\partial \psi(q, p)}{\partial p_i}; \quad \delta p_i = -\frac{\partial \psi(q, p)}{\partial q_i} \quad (1.54)$$

### Osservazione

L'evoluzione temporale di un sistema è descritta dai cambiamenti,

$$dq_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} dt; \quad dp_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} dt, \quad (1.55)$$

secondo le equazioni del moto. L'evoluzione dinamica è perciò una successione di trasformazioni canoniche infinitesime, con  $H$  (l'Hamiltoniana) come funzione generatrice. In seguito vedremo che anche in Meccanica Quantistica l'Hamiltoniana (più precisamente la quantità corrispondente, l'operatore Hamiltoniano) gioca un ruolo centrale nella descrizione dell'evoluzione temporale del sistema (i.e., l'equazione di Schrödinger.)

### 1.2.5 Equazioni di Hamilton-Jacobi

È opportuno menzionare qui un'altra formulazione indipendente della meccanica Newtoniana, che sarà utile per illustrare la relazione tra la Meccanica Classica e la Meccanica Quantistica. Nel formulare il principio di minima azione, l'azione  $S$  è vista come funzionale delle traiettorie  $q_i(t)$ . Alternativamente,

$$\begin{aligned} S &= \int dt L = \int (\sum p_i \dot{q}_i - H) dt' \\ &= \int^{(q_i)} \sum_i p_i dq_i - \int^t dt' H \\ &= S(q_i, t), \end{aligned} \quad (1.56)$$

può essere considerata come *funzione* semplice dei valori  $q_i, t$  all'istante finale. La dipendenza da essi è

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H(q_i, p_i); \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}; \quad (i = 1, 2, \dots, s) \quad (1.57)$$

combinando queste equazioni, si ottiene una singola equazione

$$\frac{\partial S(q, t)}{\partial t} + H(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t) = 0. \quad (1.58)$$

la (1.58) è chiamata *equazione di Hamilton-Jacobi*. La funzione  $S$  è chiamata funzione principale di Hamilton. È notevole il fatto che la singola equazione (che è tuttavia una equazione differenziale nonlineare, in generale difficile da risolvere) è equivalente alle  $s$  equazioni di Eulero-Lagrange o alle  $2s$  equazioni canoniche. (Vedi Landau-Lifshitz, Vol.1 o Goldstein, "Classical Mechanics".)

### 1.2.6 Invariante adiabatico

Un concetto importante nelle discussioni generali dei sistemi in cui uno o più parametri esterni variano lentamente, e che ha giocato un ruolo chiave nello sviluppo della meccanica quantistica, è quello di invariante adiabatico. Consideriamo un sistema con un moto periodico. La traiettoria nello spazio di fase  $p(q)$  - la soluzione delle equazioni del moto - è una curva chiusa. Consideriamo ora che uno o più parametri del sistema  $\alpha$  varia col tempo. La traiettoria  $p(q, \alpha(t))$  non sarà più periodico, ma se la variazione di  $\alpha(t)$  con  $t$  è sufficientemente adagio, la traiettoria resterà per molti periodi approssimativamente una curva chiusa. In tal situazione potremmo definire ancora l'integrale su un periodo

$$I(\alpha) \equiv \oint dq p. \quad (1.59)$$

Si può dimostrare in maniera generale che  $I(\alpha)$  è invariante, i.e., non dipende dal tempo  $t$ .

Invece di dimostrare il teorema in generale, consideriamo l'esempio di un pendolo di massa  $m$  e di braccio  $L$ , appesa da una carrucola, di modo che la lunghezza del braccio può essere modificato tirando su (o lasciando) il filo lentamente. (Fig. ??). Per piccole ampiezze, come è noto, l'oscillazione orizzontale del pendolo è approssimativamente descritta da un oscillatore armonico ( $x \equiv L\theta$ )

$$H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgL(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \dots \quad (1.60)$$

dove

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}. \quad (1.61)$$

La soluzione dell'equazione del moto è

$$x(t) = A \sin \omega t. \quad (1.62)$$

L'energia dell'oscillatore è

$$H = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2. \quad (1.63)$$

Ora supponiamo di tirare su il filo lentamente. Come varia l'energia e la frequenza? La variazione della frequenza è data esplicitamente dalla (1.61). La variazione dell'energia (1.63) è più difficile da vedere, perché sia  $A$  che  $\omega$  variano. Per calcolarla, occorre sapere il lavoro richiesto dalla forza esterna per tale processo.

La tensione del filo è data da

$$T = \overline{mg \cos \theta} \simeq mg - \frac{1}{2}mg\theta^2 + \dots = mg - \frac{1}{2}\frac{mg}{L^2}x^2 + \dots \quad (1.64)$$

Facendo uso della soluzione (1.62) si trova perciò

$$T = mg - \frac{mgA^2}{4L^2}.$$

Il lavoro richiesto per accorciare il braccio del pendolo di  $\delta L$  è dunque

$$\delta W = T \delta L = mg \delta L - \frac{mgA^2}{4L^2} \delta L. \quad (1.65)$$

Tuttavia non tutto il lavoro è utilizzato per aumento dell'energia dell'oscillatore: il primo termine non è altro che il lavoro necessario per aumentare il centro di massa del pendolo di  $\delta L$ , *i.e.*, per aumentare l'energia di potenziale. L'aumento dell'energia dell'oscillatore ricercato è dunque

$$\delta E = -\frac{mgA^2}{4L^2} \delta L. \quad (1.66)$$

Segue che

$$\delta E = -\frac{1}{2}\frac{\delta L}{L}, \quad \frac{\delta E}{E} = -\frac{\delta L}{2L}. \quad (1.67)$$

Paragonando questo risultato con

$$\frac{\delta \omega}{\omega} = -\frac{\delta L}{2L} \quad (1.68)$$

si ha

$$\frac{E}{\omega} = \text{const.} \quad (1.69)$$

Per consistenza, riportiamo il valore dell'integrale (1.59) per un oscillatore armonico

$$I(\alpha) = 2\pi \frac{E}{\omega}. \quad (1.70)$$

### 1.2.7 Teorema del Viriale

Un teorema di singolare importanza, che ripetutamente appare nei vari problemi di moti finiti, è il teorema del Viriale. Consideriamo una particella che si muove in un potenziale,  $V(\mathbf{r})$ . Dalle equazioni del moto di Newton,

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}), \quad (1.71)$$

si ha

$$m\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{r} \cdot \nabla V(\mathbf{r}). \quad (1.72)$$

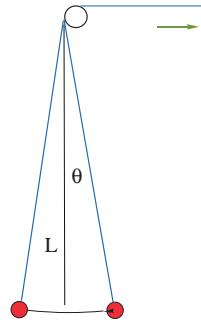


Figura 1.4:

Prendiamo ora una media temporale nell'intervallo,  $(-T/2, T/2)$  di questa equazione. Un'integrazione per parti dà

$$\frac{1}{T} m \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}|_{T/2}^{T/2} - \overline{m \dot{\mathbf{r}}^2} = -\overline{\mathbf{r} \cdot \nabla V(\mathbf{r})}. \quad (1.73)$$

Se il moto è finito, il primo termine tende a zero nel limite  $T \rightarrow \infty$ : resta allora il teorema

$$\overline{m \dot{\mathbf{r}}^2} = \overline{\mathbf{r} \cdot \nabla V(\mathbf{r})}, \quad (1.74)$$

cioè il termine cinetico è in media uguale alla media di  $\frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \nabla V(\mathbf{r})$ .

## 1.3 Sviluppo Storico: Nascita della Meccanica Quantistica

In questo capitolo discuteremo brevemente alcuni aspetti dello sviluppo storico che hanno portato alla scoperta della Meccanica Quantistica: il concetto della dualità onda-corpuscolo delle particelle elementari e l'idea della quantizzazione dei moti periodici, accennati nell'Introduzione, saranno esposti con più esattezza.

### 1.3.1 Radiazione del corpo nero e la formula di Planck

Consideriamo un sistema macroscopico descritto dalle variabili canoniche  $\{p_i, q_i\}$ ,  $i = 1, \dots, s$ . Il numero di gradi di libertà  $s$  è molto grande, tipicamente dell'ordine di  $N_A \simeq 6 \cdot 10^{23}$  (il numero di Avogadro). Supponiamo che questo sistema sia in equilibrio con un serbatoio termico tenuto ad una temperatura fissa,  $T$ .

Sia  $E(q_1, p_1, \dots, p_s)$  l'energia del sistema. Secondo la fisica statistica di Boltzman la probabilità che il sistema si trovi tra gli stati  $(q_1, q_1 + dq_1), (p_1, p_1 + dp_1), \dots (p_s, p_s + dp_s)$  è data da

$$P(q_1, \dots, p_s) dq_1 \cdots dp_s = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-E(q_1, p_1, \dots, p_s)/kT} \quad (1.75)$$

dove  $k = 1.380658 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  è la costante di Boltzman;  $\mathcal{N}$  è la costante di normalizzazione

$$\mathcal{N} = \int \cdots \int dq_1 \cdots dp_s e^{-E/kT}, \quad (1.76)$$

tal che la probabilità totale sia uno.

Dalla legge di Boltzman segue immediatamente la legge di *equipartizione*: per un sistema descritto da una Hamiltoniana qualsiasi del tipo

$$H = \sum_{i=1}^s (\alpha_i p_i^2 + \beta_i q_i^2), \quad (1.77)$$

il valor medio di un singolo termine dell'Hamiltoniana è uguale a

$$\langle \alpha p_n^2 \rangle = \langle \beta_n q_n^2 \rangle = \frac{1}{2} kT, \quad (\text{indip. da } n), \quad (1.78)$$

i.e., ogni grado di libertà del sistema gode in media la stessa frazione  $\frac{1}{2} kT$  di energia.

La teoria classica del Calore Specifico è una conseguenza semplice della legge di equipartizione. Per esempio, nel caso di un gas ideale monoatomico,  $\alpha_i = 1/2m$ ,  $\beta_i = 0$ , mentre

$$E = \sum_j E_j; \quad E_j = \frac{(p_{jx}^2 + p_{jy}^2 + p_{jz}^2)}{2m} + \frac{p_\theta^2 + p_\phi^2 / \sin \theta^2}{2I}$$

per un gas bi-atomico, dove gli ultimi termini rappresentano i gradi di libertà di rotazione (il grado di libertà di oscillazione radiale tra le due molecole è qui trascurato). L'energia totale per una mole è allora

$$U = \frac{3}{2} kTN_A = \frac{3}{2} RT;$$

$$U = \frac{5}{2} kTN_A = \frac{5}{2} RT,$$

rispettivamente per i gas monatomici e per i gas bi-atomici.  $N_A$  è il numero di Avogadro,  $R = N_A k \simeq 8.31441 \cdot 10^7 \text{ erg} \cdot \text{mol}^{-1} \text{K}^{-1}$  è la costante di gas. Segue che il calore specifico nei due casi è dato da:

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \begin{cases} 3R/2 \simeq 2.98, & \text{gas monatomici,} \\ 5R/2 \simeq 4.96 & \text{gas biatomici} \end{cases} \quad (1.79)$$

(in unità Cal/K/mol).

Questi risultati della teoria classica sono ben verificati sperimentalmente a temperatura ambiente ma a temperature più basse il calore specifico osservato tende a valori più piccoli. Lo stesso vale nel caso dei solidi dove il risultato classico,  $C \simeq 3R \simeq 5.9$  (legge di Dulong-Petit), è valido solo a temperature ambiente; il calore specifico sperimentale tende a zero a basse temperature.

Sembra dunque che a basse temperature certi gradi di libertà “muoiano” o “vengano congelati” e non prendano la loro parte di energia come ci si aspetterebbe dalla legge di equipartizione. (Infatti la teoria corretta del calore specifico è stata formulata da Debye e da Einstein dopo la scoperta del quanto di energia da parte di Planck (1900).)

Essenzialmente lo stesso problema appariva, in modo più drammatico, negli ultimi decenni del 19-simo secolo, nel cosiddetto problema “del corpo nero”. Consideriamo una cavità tenuta ad una temperatura  $T$ . Il suo interno è riempito delle radiazioni elettromagnetiche, in equilibrio con il serbatoio termico (la parete della cavità).

Ora, qual’è il colore della radiazione di un corpo nero? Detto in altri termini, quale colore (lunghezze d’onda) di luce si trova in un corpo nero, e con quale intensità relativa? O, qual’è il calore specifico del “vuoto”, cioè delle radiazioni elettromagnetiche a temperatura  $T$ ?

La risposta della fisica classica a questi problemi è la seguente. L’energia del campo elettromagnetico nel vuoto è (vedi Landau-Lifshitz, Vol. 2):

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_V (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) dv. \quad (1.80)$$

Le soluzioni formali delle equazioni di Maxwell nel vuoto sono

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}; \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\phi = 0), \quad (1.81)$$

dove  $\mathbf{A}$  è un potenziale vettoriale arbitrario che soddisfa alle equazioni

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A} = 0; \quad (1.82)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (1.83)$$

La seconda condizione (1.83) è la scelta di gauge per eliminare la ridondanza esistente nella parametrizzazione dei campi elettromagnetici in termini del potenziale vettoriale.

La soluzione generica di (1.82),(1.83), è un’onda piana del tipo

$$\epsilon_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt) + \epsilon_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - ckt) \quad (1.84)$$

con  $\mathbf{k}$  arbitrario,  $k \equiv |\mathbf{k}|$ ,

$$\epsilon_1 \cdot \mathbf{k} = \epsilon_2 \cdot \mathbf{k} = \epsilon_1 \cdot \epsilon_2 = 0. \quad (1.85)$$

La soluzione generale è una qualsiasi combinazione lineare di questi oscillatori armonici. L’Hamiltoniana che dà luogo a una tale combinazione come soluzione, è semplicemente:

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{c^2}{4} \mathbf{p}_{(1)}^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{q}_{(1)}^2 \right) + \sum_{\mathbf{k}} \left( \frac{c^2}{4} \mathbf{p}_{(2)}^2 + \mathbf{k}^2 \mathbf{q}_{(2)}^2 \right); \quad (1.86)$$

il sistema è equivalente a due gruppi di oscillatori indipendenti. Le due possibili direzioni dell’oscillazione corrispondono alle due polarizzazioni possibili della luce, fatto ben noto empiricamente.

Nelle precedenti equazioni,  $\mathbf{k}$  sono vettori arbitri: per “contare” i gradi di libertà è spesso conveniente immaginare che il sistema sia confinato (come lo è nel caso di un corpo nero finito) in un volume finito e introdurre un’opportuna condizione al contorno, per es., periodica. Ad esempio se la cavità è un cubo di lato  $L$ , i valori permessi per  $\mathbf{k}$  sono

$$k_x = \frac{\pi n_x}{L}; \quad k_y = \frac{\pi n_y}{L}; \quad k_z = \frac{\pi n_z}{L}; \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots \infty \quad (1.87)$$

Visto che l'Hamiltoniana del campo della radiazione ha la forma standard (1.77), si può applicare la legge di equipartizione per calcolare la sua energia. La risposta è semplicemente

$$U = f k T, \quad f (= \text{il numero dei gradi di libertà}) = \infty, \quad (1.88)$$

perciò

$$U = \infty; \quad C = \frac{\partial U}{\partial T} = \infty. \quad (1.89)$$

Dunque secondo la teoria di Maxwell l'energia del campo di radiazione elettromagnetica in un volume finito sarebbe infinita; per aumentare la temperatura di una cavità di un grado ci vorrebbe un calore infinito. Questi risultati sono in chiara contraddizione con le più elementari esperienze quotidiane. Più precisamente,  $U$  per unità di volume è noto empiricamente (*legge di Stefan*):

$$U = \sigma T^4; \quad \sigma = 7.64 \cdot 10^{-15} \text{ergcm}^{-3} \text{K}^{-4}.$$

Questo è il *problema del corpo nero*.

La causa di questa catastrofe è facile da individuare: secondo la legge classica di equipartizione alle luci (o le oscillazioni) di lunghezza d'onda arbitrariamente corta -  $n_x, n_y, n_z$  arbitrariamente grandi - dovrebbero essere assegnate la stessa parte  $kT$  dell'energia. I fatti sperimentali indicano che il numero effettivo di gradi di libertà ad ogni temperatura è in realtà molto minore.

È istruttivo studiare l'energia del campo elettromagnetico, per intervalli di frequenze,

$$U = \int_0^\infty d\nu u(\nu), \quad (1.90)$$

$u(\nu)d\nu$  è l'energia del campo dovuta alle oscillazioni con frequenze tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ . Calcoliamo ora  $u(\nu)$ . Siccome

$$\nu_{(\mathbf{n})} = \frac{|\mathbf{n}|c}{2L}, \quad (1.91)$$

segue che

$$dn = \frac{2Ld\nu}{c}. \quad (1.92)$$

Ma le componenti di  $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$  sono numeri interi positivi, perciò il numero dei modi tra  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  è dato da:

$$N(\nu)d\nu = 2\frac{1}{8}(4\pi n^2)dn = \frac{8\pi L^3}{c^3}\nu^2d\nu. \quad (1.93)$$

Applicando la legge di equipartizione, troviamo un risultato finito per un volume unitario,

$$u(\nu)d\nu = kT N(\nu)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2d\nu. \quad (1.94)$$

(Formula di *Reyleigh - Jeans*).

### Osservazioni

- A fissa  $T$ , la formula di *Reyleigh - Jeans* è in accordo con i dati sperimentali a bassa frequenza.
- L'intervallo di frequenze dove la formula è valida, si allarga verso alte frequenze con  $T$ ; in altri termini, a  $\nu$  fissa, la formula è valida ad alte temperature ma fallisce a basse temperature. È chiaro che qui vediamo lo stesso problema che abbiamo incontrato per la teoria del calore specifico di altre sostanze: ad una data temperatura solo certi gradi di libertà sono "attivi"; altri sembrano "inattivi".

- Facendo l'integrazione (1.94) da 0 a  $\infty$  ritroviamo il risultato disastroso che è stato notato prima (i.e.,  $\infty$ ). È chiaro che la divergenza è dovuta ai modi di frequenza arbitrariamente alta. (Per questo motivo, il problema è a volte chiamato *catastrofe ultravioletta*.)

Il primo passo verso la soluzione è stata compiuto da Wien (1893). Egli notò che i dati sperimentali mostravano una “legge di scaling”:

$$u(v) dv = \frac{8\pi}{c^3} F(v/T) v^3 dv : \quad (1.95)$$

con una funzione  $F$  da determinare empiricamente. In altri termini, se  $u(v)$  è noto empiricamente ad una temperatura, siamo in grado di predire  $u(v)$  a qualsiasi altra temperatura usando (1.95). Come è facile verificare, inoltre, la formula di scaling è consistente con la legge di Stefan.

Anche se Wien non riuscii a calcolare  $F$ , egli fu in grado di trovare una formula approssimata,

$$F(x) = k\beta e^{-\beta x}; \quad \beta = \text{cost.}, \quad (1.96)$$

che è in accordo con i dati ad alta frequenza  $x = v/T$ . Sostituendo questa funzione troviamo la *formula di Wien*,

$$\begin{aligned} u(v) dv &= \frac{8\pi k \beta}{c^3} e^{-\beta v/T} v^3 dv \\ &= \frac{8\pi h v}{c^3} e^{-hv/kT} v^2 dv, \end{aligned} \quad (1.97)$$

dove

$$h \equiv k\beta = 6.626 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec.} \quad (1.98)$$

Abbiamo dunque la formula classica (1.94), valida a basse frequenze, e la formula di Wien (1.97), valida ad alte frequenze. Fu Planck (1900) a trovare la corretta formula di interpolazione,

$$u(v) dv = \frac{8\pi}{c^3} \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1} v^2 dv. \quad (1.99)$$

Questa è la celebre *formula di Planck*. Essa si riduce a (1.94) ed a (1.97), nei limiti,  $hv/kT \ll 1$  e  $hv/kT \gg 1$ , rispettivamente. La morale della storia è che per spiegare i dati sperimentali, nella formula classica (1.94) va fatta la sostituzione,

$$kT \Rightarrow \frac{hv}{e^{hv/kT} - 1}. \quad (1.100)$$

Ma quel'è il significato di questa sostituzione?

Il contributo fondamentale dato da Planck (1900), che segna la nascita della nuova meccanica, fu quello di dare la corretta interpretazione a (1.100), i.e., che essa implica l'esistenza di un **quanto di energia**. Ripeteremo ora l'argomentazione di Planck e dimostreremo la formula (1.99), usando l'ipotesi di quanto di energia.

(All'epoca l'esistenza degli atomi, i.e., il fatto che esistesse un'unità di materia, era universalmente accettato, anch se solo da recente. L'idea di Planck fu quella di generalizzare tale struttura discreta anche per l'energia eletromagnetica.)

Per ogni frequenza e per ognuna delle due polarizzazioni, l'Hamiltoniana per il campo eletromagnetico è un semplice oscillatore armonico,

$$H = aq^2 + bp^2. \quad (1.101)$$

L'energia media a temperatura  $T$  è

$$\langle E \rangle = \frac{\partial}{\partial(-1/kT)} \log \mathcal{N}, \quad (1.102)$$

$$\mathcal{N} = \int dq dp e^{-(aq^2+bp^2)/kT} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \int dx dy e^{-(x^2+y^2)/kT}, \quad (1.103)$$

dove nella seconda le variabili sono state cambiate a  $x = \sqrt{a}q$ ;  $y = \sqrt{b}p$ . Cambiando ulteriormente le variabili a quelle sferiche,  $E \equiv x^2 + y^2$ ;  $\theta \equiv \tan^{-1} y/x$ , e notando che l'integrazione angolare è banale, si ha

$$\langle E \rangle = \frac{\partial}{\partial(-1/kT)} \log \mathcal{N}', \quad (1.104)$$

$$\mathcal{N}' = \int dE e^{-E/kT}. \quad (1.105)$$

Se si facesse l'integrazione su  $E$  normalmente si avrebbe  $\langle E \rangle = kT$  e ritroveremmo la formula di Rayleigh-Jeans. Invece, supporremo, con Planck, che per qualche ragione l'energia possa prendere solo valori discreti,

$$E_n = n\epsilon, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (1.106)$$

In questo caso l'integrale viene sostituito dalla somma,

$$\int dE \rightarrow \epsilon \sum_n. \quad (1.107)$$

Di conseguenza si ha

$$\langle E \rangle = \frac{\partial}{\partial(-1/kT)} \log \mathcal{N}'', \quad (1.108)$$

$$\mathcal{N}'' = \epsilon \sum_n e^{-n\epsilon/kT} = \frac{\epsilon}{1 - e^{-\epsilon/kT}}. \quad (1.109)$$

Si ottiene così la formula “quantistica per  $\langle E \rangle$ ”

$$\langle E \rangle = \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1}. \quad (1.110)$$

Se scegliamo come unità (“quanto) di energia

$$\epsilon = h\nu, \quad (1.111)$$

usiamo (1.110) al posto del risultato classico  $kT$  per  $\langle E \rangle$ , e alla fine sommiamo sulle frequenze, otteniamo precisamente la formula di Planck!

Dunque il significato della formula empirica di Planck è questo: l'energia del campo elettromagnetico è “quantizzata. La luce monocromatica, di frequenza  $\nu$  (i.e., di lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu$ ) è fatta da un insieme di quanti (che chiameremo “fotoni), ciascuno con l'energia  $h\nu$ . La legge di equipartizione non è più valida perché i gradi di libertà associati alle frequenze alte, avendo quanti troppo grandi ad una data temperatura ( $h\nu \gg kT$ ) non riescono ad ottenere la loro porzione di energia ( $kT$ ) ed rimangono effettivamente inattivi.

Un'analogia spiegazione del comportamento del calore specifico di varie sostanze è stata data da Debye e Einstein.

L'esempio più grande di corpo nero è l'universo stesso: come è noto l'universo di oggi è riempito di radiazioni microonde (*cosmic microwave radiation*) corrispondenti alla temperatura di circa  $2.7^0K$ , che è una sorta di radiazione fossile dall'epoca iniziale dell'espansione dell'universo.

### 1.3.2 Effetto photoelettrico

La soluzione del problema del corpo nero e l'ipotesi del quanto di energia (Planck, 1900) segnarono la nascita della fisica quantistica, ma dovettero attendere quasi 10 anni prima di essere universalmente accettate.

Un'evidenza più diretta della proprietà corpuscolare della luce venne dall'analisi (Einstein, 1905) del cosiddetto "effetto photoelettrico" (Hertz 1887). In questa esperienza, un raggio X (raggio elettromagnetico di alta frequenza) viene fatto incidere sulla superficie di un metallo alkalino (per es. *Li*). Dalla superficie del metallo saltano fuori gli elettroni, che vengono misurati in forma di corrente (Fig.1.5). I fatti empirici principali sono:

- (i) l'energia di ciascun elettrone è indipendente dall'intensità della luce;
- (ii) al crescere dell'intensità della luce aumenta il numero degli elettroni (i.e., aumenta la corrente foto-elettrica);
- (iii) l'energia di ciascun elettrone dipende dal colore ( $\lambda$ ) del raggio;
- (iv) la corrente fotoelettrica si accende immediatamente dopo che la superficie viene illuminata.

È estremamente difficile capire questi fatti nella teoria di Maxwell. (Vedi Tomonaga). Fu Einstein il primo a osservare che tutte le suddette caratteristiche dell'esperienza trovano una spiegazione naturale se si adotta l'ipotesi di quanto di energia di Planck. Infatti supponiamo che il raggio X sia un fascio di "fotoni, ciascuno con energia  $h\nu$  ( $\nu$  sarà uguale per tutti se la luce è monocromatica; altrimenti si troveranno diversi tipi di fotoni nel fascio). Supponiamo inoltre che gli elettroni, originalmente legati agli atomi del metallo, ricevono tutta l'energia del fotone che li colpisce; se l'energia ricevuta è sufficientemente grande (i.e., rispetto all'energia di legame) essi salteranno fuori. Questa teoria predice una semplice relazione tra l'energia massima dell'elettrone  $E$  e la frequenza della luce  $\nu$ ,

$$E = h\nu - A, \quad (1.112)$$

dove  $A$  è una costante che dipende dalla sostanza.

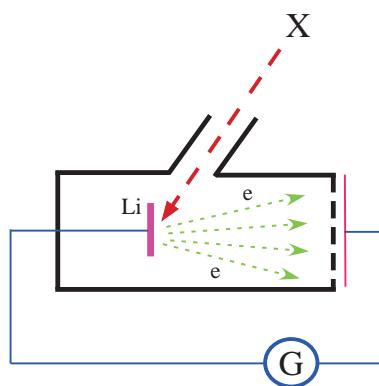


Figura 1.5: Effetto photoelettrico

I dati sperimentali, presi dall'articoli di Millikan (1916) mostrano che la relazione lineare predetta da (1.112) è effettivamente osservata; inoltre dall'inclinazione della retta sperimentale si trova il valore per  $h$ :

$$h \simeq 6.65 \cdot 10^{-27} \text{ ergsec}, \quad (1.113)$$

in ottimo accordo con il valore ottenuto da Wien-Planck (1.98). In questa maniera l’ipotesi di quanto di energia di Planck per la luce, è stata inequivocabilmente verificata.

Prendiamo nota che il carattere corpuscolare della luce, messo in evidenza dall’analisi dell’effetto fotoelettrico, si manifesta chiaramente anche nelle diffusioni dei raggi X da elettroni (*Effetto Compton*: vedi Problema 2).

### 1.3.3 Modello atomico di Bohr

Nella discussione dello sviluppo storico che ha portato alla scoperta della nuova meccanica, un successivo passo fondamentale è stato quello compiuto da Bohr (1913). Come era già noto allora, i gas ad alta temperatura emettono luce con spettro caratteristico dell’elemento. (Per es., la lampada al sodio con la caratteristica luce di colore arancione). Per l’idrogeno, lo spettro contiene le linee corrispondenti alle lunghezze d’onda, 6562.8, 4861.3, 4340.5, 4101.7, … (Å). Per queste linee spettrali, Balmer (1885) aveva trovato una formula empirica,

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4} \lambda_0, \quad \lambda_0 = 3645.6 \text{ Å}, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (1.114)$$

Più tardi Rydberg aveva scoperto una formula universale

$$\frac{v}{c} = \frac{1}{\lambda} = \frac{R}{(m+a)^2} - \frac{R}{(m+b)^2}; \quad (1.115)$$

dove  $R$  è una costante universale (i.e., indipendente dall’atomo),

$$R = 109678 \text{ cm}^{-1} \quad (1.116)$$

(chiamata *costante di Rydberg*) e  $a, b$  sono costanti che dipendono dall’elemento. La (1.115) rappresentava bene tutte le linee spettrali misurate per vari atomi. Restava da interpretare e comprendere il significato della formula di Rydberg.

L’idea di Bohr era che l’energia dell’elettrone legato nell’atomo potesse prendere soltanto valori discreti, in analogia con quanto avveniva per l’oscillazione elettromagnetica. Più precisamente, Bohr formulò le seguenti ipotesi sull’atomo (l’insieme di queste era chiamato *modello di Bohr*):

- [1] I valori possibili dell’energia di un atomo sono discreti,  $E_1, E_2, \dots$  (*Livelli di energia*). Finché l’atomo è in uno dei possibili stati (*stati stazionari*) non emette luce;
- [2] L’atomo emette o assorbe luce quando un elettrone compie una transizione (un “salto”) da uno stato ( $n$ ) ad un altro ( $m$ ); la luce emessa o assorbita in tale transizione ha la frequenza uguale a,

$$h\nu = E_n - E_m, \quad (1.117)$$

- [3] l’elettrone che si trova in uno stato stazionario si muove secondo la Meccanica Classica (questa ipotesi subirà una sostanziale modifica in Meccanica Quantistica);

- [4] Per  $n \gg 1$ , i risultati della nuova meccanica coincidono con quelli ottenuti in Meccanica Classica (*Principio di Corrispondenza* di Bohr).

Notiamo che le ipotesi di Bohr eliminano immediatamente (per decreto) la difficoltà legata alla stabilità dell’atomo, discussa nell’Introduzione. Le ipotesi [1] e [2] permettono una naturale interpretazione della struttura della formula di Rydberg, attribuendo ai singoli termini  $E_n$  (livelli di energia), e *non alle loro differenze*, il significato fondamentale. Con grande ingegno, combinando le ipotesi sopra descritte, Bohr fu in grado di ottenere  $E_n$  nel caso dell’atomo di idrogeno:

$$E_n = -\frac{Rhc}{n^2}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.118)$$

e di calcolare la costante di Rydberg in termini di  $m$ ,  $e$ ,  $c$  e  $h$ :

$$R = \frac{2\pi^2 me^4}{ch^3} \simeq 1.09 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-1} \quad (1.119)$$

in accordo con il suo valore empirico. (Vedi Tomonaga.) Bohr riuscì inoltre a determinare l'ordine di grandezza del raggio dell'atomo di idrogeno

$$r_{Bohr} = \frac{\hbar^2}{me^2} \simeq 0.529177 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \quad (1.120)$$

(chiamato *raggio di Bohr*) dove è stata introdotta una costante legata a  $h$ ,

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \simeq 1.05 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sec.} \quad (1.121)$$

Sia  $h$  che  $\hbar$  sarà chiamata costante di Planck.

L'esistenza di stati stazionari discreti (livelli di energia) in atomi è stata verificata in un'elegante serie di esperienze fatte da Franck e Hertz (1913).

### 1.3.4 Condizione di quantizzazione di Bohr e Sommerfeld; Onda di de Broglie

La correttezza dell'idea di quantizzazione fu dunque inequivocabile dopo il lavoro di Planck (quantizzazione dell'energia elettromagnetica); quello di Einstein-Debye (quantizzazione dell'oscillazione atomico/molecolare nella teoria del calore specifico) e ora quello di Bohr (quantizzazione del moto degli elettroni nell'atomo), ma la formulazione corretta della Meccanica Quantistica dovette attendere i lavori di Heisenberg e Schrödinger (1924). È di un certo interesse storico, tuttavia, ricordare due altri contributi importanti dell'epoca "pre-meccanica-quantistica".

Bohr e Sommerfeld tentarono di formulare l'idea della quantizzazione in modo universale, di modo che essa fosse applicabile a tutti i moti classici finiti (periodici). Essi ipotizzarono la regola,

$$\oint p dq = nh \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.122)$$

(condizione di quantizzazione di Bohr e Sommerfeld) dove  $q$  e  $p$  si riferiscono a una coppia arbitraria di variabili canoniche, e l'integrale va calcolato su un periodo classico.

Osservazioni:

- La limitazione ai moti finiti (periodici) è importante. Non vi è nessuna indicazione empirica che i moti non periodici siano quantizzati, fatto che troverà conferma in Meccanica Quantistica.
- Per l'oscillatore armonico la (1.122), in accordo con l'ipotesi di Planck, dà il risultato  $E_n = n\omega\hbar = nh\nu$ , che per l'esattezza differisce da quello corretto della Meccanica Quantistica solo per una costante.
- Per l'atomo di idrogeno, la (1.122) dà il risultato corretto, ottenuto da Bohr.
- Come è noto,  $\oint p dq$  è "un invariante adiabatico". In altri termini, se uno o più parametri presenti nel sistema variano lentamente col tempo, l'integrale per un periodo di moto rimane invariante. Si noti che per le variazioni sufficientemente lenti, il moto del sistema è approssimativamente periodico per molti periodi, e perciò l'integrale  $\oint p dq$  è ben definito. Il fatto che  $\oint p dq$  è invariante adiabatico, è fondamentale per la consistenza della condizione di Bohr-Sommerfeld, (1.122). Altrimenti, non avrebbe senso proporre tale condizione come condizione universale. Basti pensare due sistemi che differiscono poco nei parametri (massa, profondità del potenziale, etc.).

- In generale, la (1.122) non è esatta in Meccanica Quantistica, ma risulta essere approssimativamente valida nel limite semi-classico (vedi dopo).

L'ultimo tassello mancante, per così dire, alla formulazione della Meccanica Quantistica fu il concetto che la dualità onda - corpuscolo, scoperta per la luce e successivamente per gli elettroni (per es. l'esperienza di Davisson-Germer (1927)), fosse in realtà valida per *tutte* le particelle elementari (de Broglie, 1925). In particolare, ad ogni particella di impulso  $p$ , va associata una sorta di onda (*onda di de Broglie*) di lunghezza d'onda

$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p}} \quad (1.123)$$

(de Broglie). Questa relazione, pur semplice, è di fondamentale importanza. de Broglie fu in grado di dare una “derivazione della formula di Bohr e Sommerfeld a partire dalla (1.123). Inoltre, la consistenza dell'ipotesi (1.123) implica che ad ogni particella va associato un “pacchetto d'onda. La velocità della particella va associata alla velocità di gruppo di quest'ultimo (e non la velocità di fase). In altre parole il lavoro di de Broglie offrì una prima chiave per interpretare e quantificare l'inconsueta idea della dualità onda - corpuscolo.

### 1.3.5 Problemi

1. Si consideri un pendolo semplice (peso sorretto da una fune di massa trascurabile) sostenuto da una carrucola. Si dimostri che, se quando la fune viene tirata molto lentamente mentre il pendolo è in oscillazione, la quantità  $E/v$  si mantiene costante (invariante adiabatico), dove  $E$  è l'energia dell'oscillazione (*i.e.*, senza l'energia di potenziale).
2. *Effetto Compton* e cinematica relativistica. Si consideri lo scattering di un raggio  $X$  su un elettrone in quiete. Il raggio  $X$  di lunghezza d'onda  $\lambda$  è considerato come un

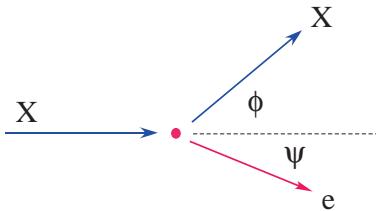


Figura 1.6: Effetto Compton

fascio di fotoni, ciascuno con energia  $h\nu$  e impulso  $p = h\nu/c$ , dove  $v = c/\lambda$ . Siano

$$p_e = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{e} \quad E_e = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

l'impulso e l'energia dell'elettrone nello stato finale, e chiamiamo  $\phi$  e  $\theta$  gli angoli che formano le velocità finali del fotone e dell'elettrone, rispetto alla direzione incidente. Il fotone ha energia e impulso finali  $h\nu'$  e  $h\nu'/c$ . (vedi Fig. 1.6)

- Si usi la conservazione dell' impulso per trovare la relazione

$$\left( \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)^2 = \left( \frac{h\nu}{c} \right)^2 + \left( \frac{h\nu'}{c} \right)^2 - 2 \left( \frac{h\nu}{c} \right) \left( \frac{h\nu'}{c} \right) \cos\phi.$$

- Si usi la conservazione dell'energia e la formula precedente per ottenere:

$$v' = \frac{v}{1 + (2hv/mc^2) \sin^2(\phi/2)}$$

- iii) Si dimostri che la lunghezza d'onda  $\lambda'$  del raggio X emesso nella direzione  $\phi$  soddisfa

$$\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc} \sin^2(\phi/2)$$

- (Formula di Compton;  $h/mc = 2.42 \cdot 10^{-10}$  cm si chiama *lunghezza Compton* dell'elettrone)

- iv) Si trovi l'energia dell'elettrone  $E_e$  nello stato finale, in termini di  $v$  e di  $\phi$ . Si calcoli  $E_e$  per  $\lambda = 10^{-9}$  cm e  $\phi = \pi/2$ . ( $m = 9.1 \cdot 10^{-28}$  gr quindi  $mc^2 = 8 \cdot 10^{-7}$  erg).

- 

3. Si consideri un atomo d'idrogeno (1 protone + un elettrone;  $m_p = 1836m_e$ ).

- Si calcoli la massa ridotta (e si concluda che possiamo usare  $m_{ridotta} \simeq m_e$ );
- Si risolva l'equazione del moto (classico)  $m_e r (d\theta/dt)^2 = (e/r)^2$ , assumendo  $r$  costante;
- Sia  $\theta(t) = 2\pi v t + \delta$ . Si determini  $v$  facendo uso di  $m_e = 9 \cdot 10^{-28}$  gr,  $r = 5 \cdot 10^{-9}$  cm,  $e^2 = 2 \cdot 10^{-19}$  erg · cm;
- Si calcoli  $hv$ , dove  $h$  è la costante di Plank ( $h = 7 \cdot 10^{-27}$  erg · sec) e lo si paragoni con  $kT$  per  $T = 273^\circ K$ , dove  $k$  è la costante di Boltzman ( $k = 1 \cdot 10^{-16}$  erg · K $^{-1}$ ). Dimostrare che i gradi di libertà associati agli elettroni sono "congelati a  $T \sim 0^\circ C$  e giustificare il calcolo del calore specifico dei solidi, fatto senza tener conto degli elettroni.

4. Si costruiscano quantità che abbiano la dimensione di una lunghezza, facendo uso di  $[m_e]$ ,  $[c]$ ,  $[h]$  e  $[e^2]$ .

5. Si verifichi che i potenziali di Liénard-Wiechart

$$\phi(r, t) = \int dV_2 \frac{\rho(r_2, t - r_{12}/c)}{r_{12}}$$

$$A(r, t) = \frac{1}{c} \int dV_2 \frac{j(r_2, t - r_{12}/c)}{r_{12}}$$

sono soluzioni delle equazioni di Maxwell in presenza di una distribuzione di carica (di densità  $\rho$ ) e di corrente (di densità  $j$ ).

6. Si trovi la formula

$$I = 2\vec{d}^2/3c^2$$

per l'intensità di energia irradiata per unità di tempo da un dipolo elettrico.

7. Sono state osservate (all'inizio del secolo) le seguenti linee spettrali per un atomo (in  $\text{cm}^{-1}$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_1 &= 82258.27 & \tilde{\nu}_5 &= 15232.97 & \tilde{\nu}_8 &= 5331.52 & \tilde{\nu}_2 &= 97491.28 \\ \tilde{\nu}_6 &= 20564.57 & \tilde{\nu}_9 &= 7799.30 & \tilde{\nu}_3 &= 102822.84 & \tilde{\nu}_7 &= 23032.31 \\ \tilde{\nu}_{10} &= 2469 & \tilde{\nu}_4 &= 105290.58 & & & & (1.124) \end{aligned}$$

dove  $\tilde{\nu} = 1/\lambda$  è l'inverso della lunghezza d'onda ("numero d'onda").

- Si trovino tutti gli esempi della *regola di combinazione di Ritz*. (P.e.,  $\tilde{v}_7 - \tilde{v}_5 = \tilde{v}_9$ );
  - Si dimostri che tutte le linee corrispondono alle varie combinazioni di *cinque* termini spettrali;
  - Si trovi una formula semplice per questi termini (tenendo conto del fatto che le considerazioni i) e ii) danno solo le *differenze* tra i termini);;
  - Che atomo è questo?
8. Si calcoli il numero di fotoni emessi al secondo da una sorgente di luce di 1 *candela*. Si assuma  $\lambda = 5600 \text{ \AA}$ . (Una sorgente di una candela emette luce con una potenza di 0.01 watt). Supponete che un osservatore guardi una sorgente di luce isotropa di una candela a una distanza di 100 metri. Calcolate il numero di fotoni che entrano in uno dei suoi occhi al secondo; assumete che la pupilla abbia un diametro di 4mm. Poiché il numero di fotoni è così grande, non osserviamo alcun tremolio, anche se il flusso luminoso è piccolo per gli standard macroscopici.
9. Una stella di prima magnitudo apparente, come la stella di Aldebaran, è facilmente visibile a occhio nudo e la si vede lampeggiare. Tale stella produce un flusso sulla superficie della terra di  $10^{-6} \text{ lumen/m}^2$ . Un lumen alla lunghezza d'onda di massima visibilità, che è di circa  $5560 \text{ \AA}$ , corrisponde a 0.0016 watt. Si calcoli il numero di fotoni che entrano nell'occhio di un osservatore che vede una tale stella.