Meccanica Quantistica - a.a. 2015/2016

Esame scritto - 01/02/2016

Risolvere, a scelta, o Problemi 1 e 2, o Problemi 1 e 3

Tempo a disposizione 3 ore

Problema 1

Si consideri una Hamiltoniana di oscillatore armonico bidimensionale

$$H = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) \tag{1}$$

1) Usando la notazione $N = n_x + n_y$, dove n_x, n_y sono i numeri di occupazione per i due oscillatori unidimensionali, si faccia un elenco degli autostati $|n_x, n_y\rangle$ di H per $N \leq 2$ scrivendo accanto la corrispettiva energia.

2) Si consideri l'operatore (generatore infinitesimale delle rotazioni nel piano)

$$L_z = \frac{1}{\hbar}(xp_y - yp_x) = \frac{1}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{2}$$

Si scriva L_z in termini degli operatori di creazione e distruzione dei due oscillatori

$$x = \frac{\ell}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)\,; \qquad p_x = \frac{1}{i}\frac{m\omega\ell}{\sqrt{2}}(a - a^\dagger) \tag{3}$$

$$y = \frac{\ell}{\sqrt{2}}(b + b^\dagger)\,; \qquad p_y = \frac{1}{i}\frac{m\omega\ell}{\sqrt{2}}(b - b^\dagger) \tag{4}$$

dove

$$\ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Allo stesso modo si scriva H in termini di questi operatori e si dimostri che gli operatori commutano fra loro: $[L_z, H] = 0$, usando i noti commutatori tra gli operatori di creazione e distruzione.

3) Si scriva il risultato di $L_z|\alpha\rangle$ per ognuno degli stati scritti nel punto 1).

4) Visto che L_z ed H commutano fra loro devono essere diagonalizzabili simultaneamente. Si scriva per ognuno dei tre sottospazi corrispondenti agli autovalori di H trovati al punto 1) la matrice che rappresenta L_z e la si diagonalizzi trovando gli autovalori.

Problema 2

Schematizziamo la cella di un elettrone confinato in un solido come un cubo rettangolare di lato L in cui un singolo elettrone può muoversi liberamente.

In tutti i processi di transizione analizzati nel seguito si sottintende sempre l'approssimazione di dipolo.

1) Si scrivano le energie, E_0, E_1, E_2 , e gli autostati per il livello fondamentale ed i primi due stati eccitati del sistema. L'origine degli assi è supposta nel centro del cubo e le facce del cubo sono ortogonali agli assi coordinati.

   Nota: Per gli autostati è sufficiente scrivere la forma delle funzioni d'onda in una coordinata ed indicare i numeri quantici con cui formare i ket per le tre coordinate.

2) Il sistema viene immerso in un campo elettrico diretto lungo z e variabile nel tempo della forma

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-|t|/\tau\right) .$$

   All'istante $t = -\infty$ il sistema è nello stato fondamentale: in quale fra gli stati elencati al punto 1) può passare al tempo $t = +\infty$ calcolando le ampiezze di transizione al primo ordine in $\mathcal{E}$ e con che probabilità?

3) Si risponda alle stesse domande se il sistema è invece sottoposto ad un campo magnetico diretto lungo z:

$$B = b \, \exp\left(-|t|/\tau\right) .$$

   Si ricordi che l'accoppiamento è della forma $-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ e si trascuri lo spin ($\boldsymbol{\mu}$ è il momento magnetico).

Integrali utili

$$\frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} x \sin(2\pi\frac{x}{L}) \cos(\pi\frac{x}{L}) \, dx = \frac{16}{9}\frac{L}{\pi^2} .$$

Problema 3

Si consideri uno ione con un elettrone in un orbitale p. Nel seguito si trascura completamente lo spin. Il momento magnetico si scrive quindi

$$\boldsymbol{\mu} = -\mu_B \, \boldsymbol{\ell} \tag{5}$$

Nel problema si vuole indagare come la risposta ad un campo magnetico possa essere modificata se lo ione è immerso in un campo cristallino.

Supponiamo che il cristallo generi una energia potenziale elettrostatica

$$V = Cx^2 + Dy^2 - (C + D)z^2 \tag{6}$$

nell'intorno della posizione dello ione (origine delle coordinate).

1) Si dimostri che il potenziale (6) è un potenziale possibile, i.e., soddisfa alle equazioni di Maxwell nel vuoto, $\nabla \cdot \mathbf{E} = -\Delta V = 0$.

2) Supponendo che C, D siano dell'ordine di grandezza di tipica energia elettrostatica, $C, D \sim e^2/a_B^3$, si dica se per campi magnetici normali (ad esempio al di sotto di 1 Tesla) è più importante il campo cristallino o l'effetto magnetico.

3) Nel campo cristallino si conservano le componenti di $\mathbf{L}$? Si conserva $\mathbf{L}^2$?

4) Le autofunzioni dell'elettrone, in assenza della perturbazione del campo cristallino, possono utilmente essere scritte nella forma cartesiana (si suppone che gli stati siano normalizzati)

$$\varphi_x = x\, f(r)\,; \quad \varphi_y = y\, f(r)\,; \quad \varphi_z = z\, f(r)\,.$$

Si scriva la forma dei livelli in presenza della interzione (6) (ma senza il campo magnetico) lasciando indicati i due integrali

$$I_1 = \int d^3\mathbf{x}\; x^4\, f^2(r)\,; \qquad I_2 = \int d^3\mathbf{x}\; x^2\, y^2\, f^2(r)$$

5) Si accende un campo magnetico B diretto lungo uno degli assi, si ha effetto Zeeman al primo ordine? Cosa succede se la direzione di $\mathbf{B}$ è arbitraria? (Si ricordi che stiamo trascurando lo spin).

6) Come cambiano le conclusioni precedenti se $C = D$?

Soluzione problema 1

1)

$$\begin{array}{lll} E_0 = \ \ \hbar\omega & \text{deg. } 1 & |0,0\rangle \\ E_1 = 2\hbar\omega & \text{deg. } 2 & |1,0\rangle,\ |0,1\rangle \\ E_2 = 3\hbar\omega & \text{deg. } 3 & |2,0\rangle,\ |0,2\rangle,\ |1,1\rangle \end{array}$$

3) Sostituendo

$$L_z = -i(a^\dagger b - a b^\dagger) \tag{7}$$

e

$$H = \hbar\omega + \hbar\omega(a^\dagger a + b^\dagger b) \tag{8}$$

Effettuando i commutatori si ha

$$[L_z, a^\dagger a] = -i(-a^\dagger b - a b^\dagger)$$
$$[L_z, b^\dagger b] = -i(a^\dagger b + a b^\dagger)$$

quindi

$$[L_z, H] = 0$$

4) Ricordando che $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ e $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ si ha subito

$$\begin{aligned} &L_z|0,0\rangle = 0 \\ &L_z|1,0\rangle = -i(-ab^\dagger)|1,0\rangle = i|0,1\rangle \\ &L_z|0,1\rangle = -i(a^\dagger b)|0,1\rangle = -i|1,0\rangle \\ &L_z|2,0\rangle = -i(-ab^\dagger)|2,0\rangle = i\sqrt{2}|1,1\rangle \\ &L_z|0,2\rangle = -i(a^\dagger b)|0,2\rangle = -i\sqrt{2}|1,1\rangle \\ &L_z|1,1\rangle = -i(a^\dagger b - ab^\dagger)|1,1\rangle = -i\sqrt{2}(|2,0\rangle - |0,2\rangle) \end{aligned}$$

5)

Nel sottospazio con $E = E_0$ si ha dimensione 1 e l'autovalore $L_z = 0$.

Nel sottospazio $E = E_1$ dai risultati del punto precedente la matrice L_z ha la forma (l'elenco degli stati è quello del punto 2)

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $L_z = \pm 1$.

Nel sottospazio $E = E_2$ la matrice L_z ha la forma

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $0, 2, -2$.

Soluzione problema 2

1) Gli autostati pari e dispari sono il prodotto, per ogni asse, di:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\cos(n\pi\frac{x}{L}) \qquad n \text{ dispari}\,; \qquad \text{sol. pari} \\ g_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(n\pi\frac{x}{L}) \qquad n \text{ pari}\,; \qquad \text{sol. dispari} \end{aligned} \tag{9}$$

I ket possono quindi essere caratterizzati dalla scrittura $|n_1, n_2, n_2\rangle$. L'energia è

$$E_{n_1,n_2,n_3} = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)$$

Il livello fondamentale ed il primo eccitato hanno energia

$$E_0 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\,3\,; \quad E_1 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}(1+1+4) = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\,6$$

Il fondamentale è non degenere, il primo livello eccitato è tre volte degenere con autostati

$$|1,1,2\rangle\,, \quad |1,2,1\rangle\,, \quad |2,1,1\rangle\,.$$

Il secondo livello eccitato è tre volte degenere, con autostati

$$|1,2,2\rangle\,, \quad |2,2,1\rangle\,, \quad |2,1,2\rangle\,.$$

ed energia

$$E_2 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}(4+4+1) = \frac{\hbar^2}{2mL^2}\,9$$

2) L'accoppiamento è

$$V = ez\mathcal{E}(t)$$

quindi per parità l'unico stato che può essere eccitato a partire da $|1,1,1\rangle$ è lo stato $|1,1,2\rangle$ La frequenza di transizione è

$$\hbar\omega_1 = E_2 - E_1 = \frac{\hbar^2}{2mL^2}3$$

e l'ampiezza di transizione è

$$\mathcal{A} = \frac{1}{i\hbar}e\mathcal{E}_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 t}\langle 1,1,2|z|1,1,1\rangle e^{-t/\tau}$$

L'elemento di matrice è (vedi integrale dato nel testo)

$$\langle 1,1,2|z|1,1,1\rangle = \int_{-L/2}^{L/2} g_2(z) z f_1(z) dz = \frac{16}{9}\frac{L}{\pi^2} \equiv \mathcal{D}$$

L'integrale nel tempo è

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|/\tau} e^{i\omega_1 t} = \int_{-\infty}^{0} e^{t/\tau} e^{i\omega_1 t} + \int_{0}^{\infty} e^{t/\tau} e^{i\omega_1 t} = \frac{2\tau}{1+\tau^2\omega_1^2}$$

Per la probabilità di transizione

$$P = |\mathcal{A}|^2 = \frac{e^2\mathcal{E}_0^2\mathcal{D}^2}{\hbar^2}\frac{4\tau^2}{(1+\omega_1^2\tau^2)^2}$$

3) Se si trascura lo spin l'interazione è

$$-\mu_z B = \frac{e\hbar}{2mc} L_z B = \mu_B L_z B$$

Siccome

$$L_z = \frac{1}{i}(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})$$

la parità in totale non deve cambiare, quindi la transizione è su uno degli stati con energia E_2 (che sono pari). Inoltre ogni addendo di L_z cambia la parità sia in x che in y quindi l'unico stato possibile è $|2,2,1\rangle$. Ma L_z è dispari nello scambio $x \leftrightarrow y$ mentre gli stati $|1,1,1\rangle$ e $|2,2,1\rangle$ sono entrambi pari, quindi l'elemento di matrice è nullo.

Il risultato sarebbe non nullo se si trattasse di un parallelepipedo con $L_1 \neq L_2$.

Soluzione problema 3

1. V è proporzionale al potenziale elettrostatico φ creato dal cristallo che deve soddisfare all'equazione $\Delta\varphi = 0$ nella zona esterna alle cariche (del cristallo), ed in effetti è vero.

2. Trattandosi di interazioni elettrostatiche $C, D \sim e^2/a_B^3$. Siccome l'estensione dello ione come ordine di grandezza è anch'essa dell'ordine di a_B, il contributo all'energia è quello tipico elettrostatico cioè dell'ordine dell'eV, molto maggiore dell'energia magnetica.

3. Le componenti di $\mathbf{L}$ non si conservano, in generale, perchè $V = -e\varphi$ non è invariante sotto rotazioni. Come si verifica immediatamente l'operatore può provocare transizioni con $\Delta L = 2$, perchè si trasforma come una somma di armoniche sferiche Y_{2m}, quindi non commuta nemmeno con $\mathbf{L}^2$.

4. Per parità tutti gli elementi di matrice fuori diagonale di V sono nulli, quindi nella base $|\varphi_x\rangle \ldots$, V è diagonale. Usando la simmetria si ha (si suppongono gli stati normalizzati):

$$V_{xx} = \int_V d^3x\; x^2 f(r)^2 (Cx^2 + Dy^2 - (C+D)z^2) = CI_1 + DI_2 - (C+D)I_2 = C(I_1 - I_2)$$

ed analogamente per gli altri elementi di matrice

$$V = \begin{pmatrix} C(I_1 - I_2) & 0 & 0 \\ 0 & D(I_1 - I_2) & 0 \\ 0 & 0 & -(C + D)(I_1 - I_2) \end{pmatrix} \tag{10}$$

e questi elementi di matrice danno anche lo splitting dei livelli.

5. Siccome il campo magnetico produce una piccola perturbazione rispetto al campo cristallino, l'effetto al primo ordine dovrebbe essere $\langle s| - \boldsymbol{\mu}\mathbf{B}|s\rangle$, dove $|s\rangle$ è uno degli stati precedenti. Ma ricordiamo che, in coordinate cartesiane

$$L_i = \varepsilon_{ijk} x_j p_k \tag{11}$$

quindi gli elementi diagonali di una qualunque componente di $\mathbf{L}$ sono nulli in questa base, perciò non si ha effetto lineare. Per una direzione arbitraria si avrà sempre

$$\mathbf{B} = B_x\,\hat{\mathbf{x}} + B_y\,\hat{\mathbf{y}} + B_z\,\hat{\mathbf{z}} \tag{12}$$

ed ognuno dei termini precedenti ha effetto nullo al primo ordine, come appena visto.

6. In questo caso l'energia nel campo cristallino è (in forma matriciale)

$$V = (I_1 - I_2)C \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Per il livello associato allo stato φ_z non cambia nulla, ma l'altro livello è degenere, quindi per un campo diretto lungo z, usando la (11):

$$(V_B)_{ij} = \mu_B\,B\,(L_z)_{ij} = -i\mu_B B\,\epsilon_{3,ij}$$

e questa ha elementi di matrice fuori diagonale nel livello:

$$V_{eff} = C(I_1 - I_2) + \mu_B B \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

a cui corrispondono due autovalori

$$C(I_1 - I_2) \pm \mu_B B$$

si ha quindi effetto Zeeman, e conseguente permeabilità magnetica.

Le componenti L_x, L_y invece non hanno elementi di matrice all'interno del blocco 2×2 e non producono nessun effetto. Questo significa che per un generico campo magnetico, vedi (12), solo la componente B_z è efficace, z è uno degli assi cristallini: la permeabilità magnetica è quindi anisotropa, dipende dall'angolo fra il campo magnetico e l'asse z.

Meccanica Quantistica 1 - a.a. 2015/2016

Esame scritto - 1-Feb-2016

Risolvere, a scelta, due dei Problemi

Tempo a disposizione 3 ore

Problema 1

Si consideri una particella che si muove lungo l'asse x nel verso positivo, con numero d'onda k, dove $\hbar k = p$. È presente una barriera di potenziale schematizzabile forma

$$V(x) = f\,\delta(x) \tag{1}$$

1) Si calcoli i coefficienti di riflessione e trasmissione attraverso la barriera.

2) Si estenda ora il problema in due dimensioni, la barriera è sempre data dalla (1) ma ora l'onda incide sulla barriera con un angolo di incidenza α rispetto alla normale (asse x) cioè l'onda incidente è della forma

$$\psi(x,y) = \exp(ik\cos\alpha\, x + ik\sin\alpha\, y) = e^{ik\cos\alpha\, x}\, e^{ik\sin\alpha\, y} \ .$$

Si scriva l'onda riflessa e l'onda trasmessa.

Problema 2

Una particella A di spin $\frac{3}{2}$, a riposo, decade in due particelle B e C, rispettivamente di spin $s_B = 1$ e di spin $s_C = \frac{1}{2}$.

1) Quali valori può assumere *a priori* lo spin totale S_{tot},

$$\mathbf{S}_{tot} = \mathbf{s}_B + \mathbf{s}_C \tag{2}$$

?

2) Per ciascuno dei valori elencati al punto sopra, indicare i valori del momento angolare orbitale L del moto relativo $(B - C)$ nello stato finale, ammessi dalla conservazione del momento angolare.

3) Si supponga che la misura della distribuzione angolare della particella B abbia dato il risultato consistente con una distribuzione isotropa, nel centro di massa di B e C. Dedurre il valore di S_{tot}.

Problema 3

Un atomo di idrogeno viene preparato nello stato con funzione d'onda (normalizzata)

$$\phi = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\frac{x}{a}a^{-3/2}e^{-\frac{r}{2a}} \ , \qquad (a \equiv r_B) \ . \tag{3}$$

1) Dire se è in un autostato dell'energia e con quale autovalore.

2) a) Si effettua una misura di L_x: quali valori si possono ottenere e con che probabilità?

   b) Si effettua una misura di L_z: quali valori si possono ottenere e con che probabilità?

3) Si consideri ora un atomo di idrogeno preparato nello stato con funzione d'onda

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}R_{1,0}(r)$$

Si risponda in questo caso alle domande 1) e 2) precedenti.

Formule utili

Le coordinate cartesiane sono legate a quelle sferiche da

$$x = r\sin\theta\cos\varphi\,; \quad y = r\sin\theta\sin\varphi\,; \quad z = r\,\cos\theta$$

Funzioni d'onda radiali $R_{n,\ell}$ dell'atomo di idrogeno ($a \equiv r_B$ è il raggio di Bohr):

$$R_{1,0} = a^{-3/2}\,2e^{-r/a}\,; \qquad R_{2,0} = a^{-3/2}\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\frac{1}{2}\frac{r}{a})e^{-r/2a}\,;$$

$$R_{2,1} = a^{-3/2}\frac{1}{2\sqrt{6}}\frac{r}{a}e^{-r/2a}\,;$$

Armoniche sferiche:

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\,\cos\theta, \qquad Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,e^{\pm i\phi}$$

Soluzione

Problema 1

1) La funzione d'onda per $x < 0$ e $x > 0$ rispettivamente ha la forma

$$\psi_a(x) = e^{ikx} + R\, e^{-ikx}\, ; \qquad \psi_b(x) = T\, e^{ikx}$$

Le condizioni di raccordo sono, ponendo

$$f = \frac{\hbar^2}{m}\beta\, , \quad \beta \equiv \frac{fm}{\hbar^2}\, ,$$

$$\psi_a(0) = \psi_b(0)\, ; \qquad \frac{\hbar^2}{2m}(\psi_b'(0) - \psi_a'(0)) = \frac{\hbar^2}{m}\beta\psi_a(0)$$

cioè

$$1 + R = T\, ; \qquad i\frac{k}{2}(T - (1 - R)) = \beta T$$

da cui

$$R = \frac{\beta}{ik - \beta}\, ; \quad T = \frac{k}{k + i\beta}\, . \tag{4}$$

I coefficienti di trasmissione e di riflessione sono dati da:

$$D = |T|^2 = \frac{k^2}{k^2 + \beta^2}\, ; \qquad D = |R|^2 = \frac{\beta^2}{k^2 + \beta^2}\, ; \tag{5}$$

2) La parte in y non risente della barriera, quindi l'onda riflessa e l'onda trasmessa sono

$$\psi_R(x, y) = R\ e^{-ikx\cos\alpha + iky\sin\alpha}\, ; \qquad \psi_T(x, y) = T\ e^{ikx\cos\alpha + iky\sin\alpha}$$

Problema 2

1) $S_{tot} = \frac{3}{2}$ o $S_{tot} = \frac{1}{2}$

2) Per $S_{tot} = \frac{3}{2}$ i valori possibili di L sono

$$L = 0, 1, 2, 3\, ,$$

mentre per $S_{tot} = \frac{1}{2}$

$$L = 1, 2\, .$$

3) $S_{tot} = \frac{3}{2}$.

Problema 3

1) Si', è uno stato di $n = 2$, con

$$E = -\frac{e^2}{8a} \ .$$

2a)

$$L_x = -i\hbar \, [y \, \frac{\partial}{\partial z} - z \, \frac{\partial}{\partial y}] \ ,$$

perciò

$$L_x \, \phi = 0 \ :$$

ϕ è un autostato di L_x con autovalore 0. In altre parole ci si aspetta il risultato della misura di L_x univoco, $L_x = 0$, con probabilià 1.

2b)

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{2,1} \, [Y_{1,-1} - Y_{1,1}] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{2,1,-1} - \psi_{2,1,1}) \ ,$$

quindi la misura di L_z dà i risultati, $L_z = 1$ o $L_z = -1$ con probablità 1/2 per ciascuno.

3)

$$\psi = \frac{1}{2} (\psi_{2,1,-1} - \psi_{2,1,1}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{1,0,0} \ .$$

Questo stato non è un autostato di energia; la sua misura darà i possibili valori,

$$E_1 = -\frac{e^2}{2a} \ , \qquad \text{oppure} \qquad E_2 = -\frac{e^2}{8a}$$

con probablità 1/2 per ciascuno. Il risultato della misura di L_x è univoco, $L_x = 0$, con probabilià 1. La misura di L_z dà i risultati, $L_z = 1$, $L_z = 0$, $L_z = -1$, con rispettive probablità, 1/4, 1/2, 1/4.

Meccanica Quantistica: Recupero Compitino I

1 febbraio 2016 (A.A. 15/16)

Tempo a disposizione: 3 ore

Problema 1

Si consideri una particella che si muove lungo l'asse x nel verso positivo, con numero d'onda k, dove $\hbar k = p$. È presente una barriera di potenziale schematizzabile forma

$$V(x) = f\,\delta(x) \tag{1}$$

1) Si calcolino i coefficienti di riflessione e trasmissione attraverso la barriera.

2) Si estenda ora il problema in due dimensioni, la barriera è sempre data dalla (1) ma ora l'onda incide sulla barriera con un angolo di incidenza α rispetto alla normale (asse x) cioè l'onda incidente è della forma

$$\psi(x,y) = e^{ik\cos\alpha x + ik\sin\alpha y} = e^{ik\cos\alpha x}e^{ik\sin\alpha y}$$

Si scriva l'onda riflessa e l'onda trasmessa.

Problema 2

Si consideri una Hamiltoniana di oscillatore armonico bidimensionale

$$H = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2) \tag{2}$$

1) Usando la notazione $N = n_x + n_y$, dove n_x, n_y sono i numeri di occupazione per i due oscillatori unidimensionali, si faccia un elenco degli autostati $|n_x, n_y\rangle$ di H per $N \leq 2$ scrivendo accanto la corrispettiva energia.

2) Si consideri l'operatore (generatore infinitesimale delle rotazioni nel piano)

$$L_z = \frac{1}{\hbar}(xp_y - yp_x) = \frac{1}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{3}$$

Si scriva L_z in termini degli operatori di creazione e distruzione dei due oscillatori

$$x = \frac{\ell}{\sqrt{2}}(a+a^\dagger)\,; \qquad p_x = \frac{1}{i}\frac{m\omega\ell}{\sqrt{2}}(a-a^\dagger) \tag{4}$$

$$y = \frac{\ell}{\sqrt{2}}(b+b^\dagger)\,; \qquad p_y = \frac{1}{i}\frac{m\omega\ell}{\sqrt{2}}(b-b^\dagger) \tag{5}$$

dove

$$\ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Allo stesso modo si scriva H in termini di questi operatori e si dimostri che gli operatori commutano fra loro: $[L_z, H] = 0$, usando i noti commutatori tra gli operatori di creazione e distruzione.

3) Si scriva il risultato di $L_z|\alpha\rangle$ per ognuno degli stati scritti nel punto 1).

4) Visto che L_z ed H commutano fra loro devono essere diagonalizzabili simultaneamente. Si scriva per ognuno dei tre sottospazi corrispondenti agli autovalori di H trovati al punto 1) la matrice che rappresenta L_z e la si diagonalizzi trovando gli autovalori.

Soluzione

Problema 1

1) La funzione d'onda per $x < 0$ e $x > 0$ rispettivamente ha la forma

$$\psi_a(x) = e^{ikx} + R\, e^{-ikx}\,; \qquad \psi_b(x) = T\, e^{ikx}$$

Le condizioni di raccordo sono, ponendo

$$f = \frac{\hbar^2}{m}\beta\,, \quad \beta \equiv \frac{fm}{\hbar^2}\,,$$

$$\psi_a(0) = \psi_b(0)\,; \qquad \frac{\hbar^2}{2m}(\psi_b'(0) - \psi_a'(0)) = \frac{\hbar^2}{m}\beta\psi_a(0)$$

cioè

$$1 + R = T\,; \qquad i\frac{k}{2}(T - (1 - R)) = \beta T$$

da cui

$$R = \frac{\beta}{ik - \beta}\,; \quad T = \frac{k}{k + i\beta}\,. \tag{6}$$

I coefficienti di trasmissione e di riflessione sono dati da:

$$\mathcal{D} = |T|^2 = \frac{k^2}{k^2 + \beta^2}\,; \qquad \mathcal{R} = |R|^2 = \frac{\beta^2}{k^2 + \beta^2}\,; \tag{7}$$

2) La parte in y non risente della barriera, quindi l'onda riflessa e l'onda trasmessa sono

$$\psi_R(x, y) = R\, e^{-ikx\cos\alpha + iky\sin\alpha}\,; \qquad \psi_T(x, y) = T\, e^{ikx\cos\alpha + iky\sin\alpha}$$

Problema 2

1)

$$\begin{array}{lll}
E_0 = \ \ \hbar\omega & \text{deg. } 1 & |0,0\rangle \\
E_1 = 2\hbar\omega & \text{deg. } 2 & |1,0\rangle,\ |0,1\rangle \\
E_2 = 3\hbar\omega & \text{deg. } 3 & |2,0\rangle,\ |0,2\rangle,\ |1,1\rangle
\end{array}$$

3) Sostituendo

$$L_z = -i(a^\dagger b - ab^\dagger) \tag{8}$$

e

$$H = \hbar\omega + \hbar\omega(a^\dagger a + b^\dagger b) \tag{9}$$

Effettuando i commutatori si ha

$$[L_z, a^\dagger a] = -i(-a^\dagger b - ab^\dagger)$$
$$[L_z, b^\dagger b] = -i(a^\dagger b + ab^\dagger)$$

quindi

$$[L_z, H] = 0$$

4) Ricordando che $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ e $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ si ha subito

$$
\begin{aligned}
&L_z|0,0\rangle = 0\\
&L_z|1,0\rangle = -i(-ab^\dagger)|1,0\rangle = i|0,1\rangle\\
&L_z|0,1\rangle = -i(a^\dagger b)|0,1\rangle = -i|1,0\rangle\\
&L_z|2,0\rangle = -i(-ab^\dagger)|2,0\rangle = i\sqrt{2}|1,1\rangle\\
&L_z|0,2\rangle = -i(a^\dagger b)|0,2\rangle = -i\sqrt{2}|1,1\rangle\\
&L_z|1,1\rangle = -i(a^\dagger b - ab^\dagger)|1,1\rangle = -i\sqrt{2}(|2,0\rangle - |0,2\rangle)
\end{aligned}
$$

5)

Nel sottospazio con $E = E_0$ si ha dimensione 1 e l'autovalore $L_z = 0$.

Nel sottospazio $E = E_1$ dai risultati del punto precedente la matrice L_z ha la forma (l'elenco degli stati è quello del punto 2)

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $L_z = \pm 1$.

Nel sottospazio $E = E_2$ la matrice L_z ha la forma

$$L_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i\sqrt{2} \\ 0 & 0 & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & -i\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

con autovalori $0, 2, -2$.