

Indice

9	Interazioni Elettromagnetiche.	3
9.1	Interazione elettromagnetica in meccanica classica e quantistica.	3
9.1.1	Formulazione quantistica.	4
9.1.2	Interpretazione geometrica dell'invarianza di gauge.	8
9.2	Particella carica e solenoide.	13
9.3	Effetto Aharonov-Bohm.	17
9.3.1	Superconduttore	20
9.4	Interazione di dipolo e quadrupolo elettrico.	23
9.5	Interazione magnetica.	26
9.5.1	Interpretazione semiclassica.	27
9.6	Correzioni relativistiche: interazione LS	28
9.7	Interazione Iperfina.	30
	Appendici e Complementi	33
9.A	Formula di Poisson	33
9.B	Oscillatore e stringa magnetica.	34
9.C	Complementi sull'effetto Aharonov-Bohm.	35
9.C.1	Teorema di Eherenfest.	38
9.D	Precessione di Thomas.	40
9.E	Correzioni relativistiche in campo esterno.	42
9.F	Interazioni fra due particelle.	44

Capitolo 9

Interazioni Elettromagnetiche.

9.1 Interazione elettromagnetica in meccanica classica e quantistica.

In questo paragrafo richiameremo brevemente alcune nozioni ben note di meccanica ed elettromagnetismo classico. Il lettore può trovare un'ampia trattazione di questi argomenti, ad esempio, nei testi citati in bibliografia, [Landau1, Landau2]. Ci limiteremo quasi esclusivamente alla teoria nel limite non relativistico.

Le equazioni del moto per una particella di massa m e carica e sono:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (9.1)$$

L'espressione a secondo membro della (9.1) è chiamata *forza di Lorentz*. L'equazione (9.1) può essere ricavata da una lagrangiana della forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{e}{c} \mathbf{v} \cdot \mathbf{A} - e \Phi \quad (9.2)$$

\mathbf{A}, Φ sono rispettivamente il potenziale vettore ed il potenziale scalare, legati ai campi \mathbf{E}, \mathbf{B} dalle relazioni:

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (9.3)$$

Come è noto l'introduzione dei potenziali vettori è utile in quanto rende automaticamente soddisfatte le equazioni di Maxwell omogenee:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (9.4)$$

L'informazione contenuta nelle funzioni Φ, \mathbf{A} è ridondante rispetto alla determinazione dei campi \mathbf{E}, \mathbf{B} , infatti una qualunque trasformazione del tipo

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Lambda \quad \Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (9.5)$$

lascia invariati i campi \mathbf{E}, \mathbf{B} , che sono i soli a determinare la dinamica attraverso la (9.1). Le trasformazioni (9.5) si chiamano *trasformazioni di gauge* e l'invarianza della fisica per trasformazioni di questo tipo prende il nome di *invarianza di gauge*.

Notiamo che la lagrangiana (9.2) per trasformazioni di gauge si trasforma con

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = \mathcal{L} + \frac{e}{c} \left(\mathbf{v} \cdot \nabla \Lambda + \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) = \mathcal{L} + \frac{e}{c} \frac{d\Lambda}{dt} \quad (9.6)$$

L'aggiunta di una derivata totale alla lagrangiana non cambia il principio di Hamilton e quindi lascia invarianti le equazioni di Eulero-Lagrange.

Per effettuare il passaggio alla meccanica quantistica è opportuno riformulare le equazioni precedenti nel formalismo Hamiltoniano. L'impulso *canonico* coniugato alla variabile \mathbf{x} è

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad \Rightarrow \quad m\mathbf{v} = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (9.7)$$

Quindi l'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} - \mathcal{L} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi \quad (9.8)$$

Formalmente questo sistema si ottiene da quello in assenza di campo elettromagnetico con la sostituzione

$$H \rightarrow H + e\Phi \quad \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (9.9)$$

Questo tipo di "regola" per descrivere l'interazione elettromagnetica viene detta *accoppiamento minimale*. Sottolineiamo che l'impulso *canonico*, \mathbf{p} , **non** è la quantità di moto cinematica $m\mathbf{v}$, vedi eq.(9.7).

Nel formalismo hamiltoniano il cambiamento di gauge (9.5) porta a

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \Lambda \right)^2 + e\Phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

Questo cambiamento può essere riassorbito dalla *trasformazione canonica*, in generale dipendente dal tempo:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \nabla \Lambda \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} \quad H' = H + \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad (9.10)$$

Un modo istruttivo per verificare che la (9.10) è effettivamente una trasformazione canonica è quello di assicurarsi che la forma di Poincaré-Cartan cambia per un differenziale totale:

$$\mathbf{p}' d\mathbf{x}' - H' dt = \mathbf{p} d\mathbf{x} - H dt - \frac{e}{c} \nabla \Lambda \cdot d\mathbf{x} - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} dt = \mathbf{p} d\mathbf{x} - H dt - \frac{e}{c} d\Lambda \quad (9.11)$$

La (9.11) implica che il principio di minima azione

$$\delta \int (\mathbf{p} d\mathbf{x} - H dt) = 0$$

resta invariato e quindi si hanno le stesse equazioni di Hamilton e, come è facile verificare, le stesse parentesi di Poisson.

9.1.1 Formulazione quantistica.

In meccanica quantistica l'interazione elettromagnetica è descritta dallo stesso principio di accoppiamento minimale (9.9). In particolare in rappresentazione di Schrödinger

$$\frac{\hbar}{i} \nabla \rightarrow \frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - e\Phi \quad (9.12)$$

Quindi l'equazione di Schrödinger per una particella, che descrive l'evoluzione temporale degli stati, ha la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + e\Phi \psi \equiv H \psi \quad (9.13)$$

9.1. INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA IN MECCANICA CLASSICA E QUANTISTICA.5

Nel seguito continueremo ad usare il simbolo \mathbf{p} per indicare l'operatore impulso, $-i\hbar\nabla$: questo operatore è quello che soddisfa alle regole di commutazione canoniche:

$$[x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij} \quad [p_i, p_j] = 0 \quad (9.14)$$

Facciamo esplicitamente notare che l'impulso "cinematico" mv_i **non soddisfa** alle regole di commutazione canoniche, infatti:

$$[mv_i, mv_j] = \left[p_i - \frac{e}{c} A_i, p_j - \frac{e}{c} A_j \right] = -\frac{e}{c} ([p_i, A_j] - [p_j, A_i]) = i \frac{e\hbar}{c} \epsilon_{ijk} B_k \quad (9.15)$$

\mathbf{B} è il campo magnetico. Le (9.15) hanno una rilevanza particolare nell'ambito quantistico, infatti implicano che le diverse componenti del momento cinetico *non sono simultaneamente misurabili*, al contrario degli impulsi canonici. Nella (9.15) abbiamo usato l'espressione classica per il vettore velocità, ed in effetti il lettore può facilmente verificare che anche quantisticamente:

$$m\mathbf{v} = m \frac{d\mathbf{x}}{dt} = m i [H, \mathbf{x}] = \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (9.16)$$

L'Hamiltoniana (9.13) è un operatore hermitiano; notiamo che il campo esterno \mathbf{A} compare automaticamente nella forma simmetrizzata di Weyl:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p}^2 - \frac{e}{c} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}) + \frac{e^2}{c^2} \mathbf{A}^2 \right) + e\Phi$$

Passiamo ora alle osservabili direttamente connesse all'interazione elettromagnetica. In accordo con il fatto che $|\psi|^2$ rappresenta la distribuzione di probabilità di una particella, $\rho = e|\psi|^2$ rappresenta la densità di carica. Talvolta è utile scrivere un *operatore* $\hat{\rho}(\mathbf{y})$ che descriva la densità di carica nel punto \mathbf{y} si userà allora, per un sistema a n particelle, in rappresentazione di Schrödinger:

$$\hat{\rho}(\mathbf{y}; \mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_n) = \sum_i e_i \delta(\mathbf{y} - \mathbf{x}_i) \quad (9.17)$$

Per il caso di singola particella il valor medio su uno stato $|\psi\rangle$ dell'operatore (9.17) riproduce il risultato aspettato:

$$\langle \psi | \hat{\rho}(\mathbf{y}) | \psi \rangle = e |\psi(\mathbf{y})|^2 \equiv \rho(\mathbf{y})$$

Per quanto riguarda la densità di corrente questa è data da

$$\mathbf{j} = i \frac{e\hbar}{2m} [(\nabla\psi)^* \psi - \psi^* (\nabla\psi)] - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2 \quad (9.18)$$

È facile controllare (lasciamo il compito al lettore) che \mathbf{j} soddisfa l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0 \quad (9.19)$$

è però istruttivo ricavare la (9.18) in altro modo. La densità di corrente è *definita* dal fatto che una piccola variazione di \mathbf{A} induce una variazione di energia

$$\delta H = -\frac{1}{c} \int \mathbf{j} \delta \mathbf{A} d^3x \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{x})} = -\frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{x}) \quad (9.20)$$

Consideriamo allora la variazione di energia per uno stato generico, al primo ordine in $\delta \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \delta H &= - \int d^3x \frac{e}{2mc} \psi^* (\mathbf{p} \delta \mathbf{A} + \delta \mathbf{A} \mathbf{p}) \psi + \frac{e^2}{mc^2} \int d^3x \delta \mathbf{A} (\mathbf{A} |\psi|^2) \\ &= \int d^3x \frac{i\hbar e}{2mc} \psi^* (\nabla(\delta \mathbf{A} \psi) + \delta \mathbf{A} \nabla \psi) + \frac{e^2}{mc^2} \int d^3x \delta \mathbf{A} (\mathbf{A} |\psi|^2) \end{aligned}$$

Integrando per parti il primo addendo per riportare la variazione di energia alla forma (9.20), si ottiene:

$$\delta H = - \int d^3x \delta \mathbf{A} \left(\frac{i\hbar e}{2mc} ((\nabla \psi)^* \psi - \psi^* (\nabla \psi)) - \frac{e^2}{mc^2} \mathbf{A} |\psi|^2 \right) \quad (9.21)$$

da cui segue la (9.18).

L'Hamiltoniana (9.13) descrive l'interazione elettromagnetica per una particella puntiforme, completamente caratterizzata dalla massa m e dalla carica e . In meccanica quantistica una particella elementare può avere uno spin non nullo, s , nel qual caso la funzione d'onda che descrive lo stato ha $2s + 1$ componenti. Lo spin è un vettore assiale, trasforma infatti come un momento angolare, e a questo vettore è quindi possibile associare un momento magnetico elementare, μ , caratteristico della particella. Si avrà di conseguenza un termine aggiuntivo nella (9.13):

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + e\Phi - \boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad (9.22)$$

Conosciamo le regole di quantizzazione dello spin: detto s il massimo autovalore di una delle componenti, convenzionalmente s_z , si definisce come momento magnetico, la costante di proporzionalità nella relazione:

$$\boldsymbol{\mu} = \mu \frac{\mathbf{s}}{s} \quad (9.23)$$

cioè il massimo valore possibile per μ_z . Poichè \mathbf{s} è quantizzato in multipli (semi)interi di \hbar è naturale che i momenti magnetici vengano misurati attraverso la quantità $e\hbar/mc$. Questo è in analogia con il teorema classico di Larmor per cui ad un momento angolare ℓ è associato un momento magnetico $(e/mc)\ell$. Questa questione sarà ripresa più avanti. In particolare per l'elettrone ed il nucleone (protone) si introduce il momento magnetico di Bohr ed il momento magnetico nucleare, definiti rispettivamente da

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{m_e c} \quad \mu_p = \frac{|e|\hbar}{m_p c} \quad (9.24)$$

m_e, m_p sono rispettivamente la massa dell'elettrone e del protone. Usando lo stesso procedimento che ha condotto alla (9.21) si può ricavare dalla (9.22) la densità di corrente

$$\mathbf{j} = i \frac{e\hbar}{2m} [(\nabla \psi)^* \psi - \psi^* (\nabla \psi)] - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2 + c \nabla \wedge (\psi^* \boldsymbol{\mu} \psi) \quad (9.25)$$

Potenziali ed invarianza di gauge.

Dalla introduzione stessa dell'interazione elettromagnetica attraverso l'accoppiamento minimale dovrebbe essere chiaro che in meccanica quantistica il ruolo dei potenziali Φ, \mathbf{A} è cruciale. Il primo punto da affrontare quindi è l'invarianza di gauge. Consideriamo due sistemi descritti da due potenziali che differiscono per una trasformazione di gauge, vedi (9.5). Le due Hamiltoniane si scrivono

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi \quad i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad (9.26a)$$

$$H_\Lambda = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \Lambda \right)^2 + e\Phi - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \quad i\hbar \frac{\partial \psi_\Lambda}{\partial t} = H_\Lambda \psi_\Lambda \quad (9.26b)$$

Siano \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 gli spazi di Hilbert relativi ai due sistemi. Per problemi ad una particella possiamo considerare entrambi gli spazi coincidenti con le funzioni a quadrato sommabile su \mathbb{R}^3 . I due sistemi (9.26) sono equivalenti, cioè descrivono lo stesso sistema fisico, se si

9.1. INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA IN MECCANICA CLASSICA E QUANTISTICA.7

trova una trasformazione unitaria fra \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 in modo tale da generare la stessa dinamica, ovvero la seconda Hamiltoniana deve essere ottenuta come trasformazione della prima.

Consideriamo uno stato di \mathcal{H}_1 rappresentato da una funzione ψ e consideriamo la funzione

$$\varphi_\Lambda \equiv \exp(i\frac{e\Lambda}{\hbar c})\psi$$

Si ha immediatamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} - \frac{e}{c} \nabla \Lambda \right)^2 \varphi_\Lambda &= e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \equiv e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} H \psi \\ i\hbar \frac{\partial \varphi_\Lambda}{\partial t} &= e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} \psi = e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} H \psi - \frac{e}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \varphi_\Lambda \end{aligned}$$

Quindi φ_Λ soddisfa all'equazione

$$i\hbar \frac{\partial \varphi_\Lambda}{\partial t} = H_\Lambda \varphi_\Lambda$$

Viceversa data una soluzione ψ_Λ della (9.26b) la funzione $\varphi = \exp(-i\frac{e\Lambda}{\hbar c})\psi_\Lambda$ soddisfa alla (9.26a). C'è quindi una corrispondenza (biunivoca) fra le soluzioni delle due equazioni. La trasformazione

$$\psi_\Lambda = \exp(i\frac{e\Lambda}{\hbar c})\psi \quad (9.27)$$

è evidentemente una trasformazione unitaria e quindi usare l'equazione (9.26a) o l'equazione (9.26b) è assolutamente equivalente dal punto di vista fisico.

La cosa si può anche impostare in altro modo. Consideriamo per semplicità le trasformazioni di gauge indipendenti dal tempo. In questo caso, come si vede dalle (9.26) i due sistemi differiscono per il cambiamento di "coordinate canoniche"

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \rightarrow (\mathbf{x}', \mathbf{p}') = (\mathbf{x}, \mathbf{p} - \frac{e}{c} \nabla \Lambda) \quad (9.28)$$

Questa trasformazione lascia invariate le regole di commutazione, infatti

$$[x'_i, p'_j] = \left[x_i, p_j - \frac{e}{c} \partial_j \Lambda \right] = [x_i, p_j] \quad (9.29)$$

Il teorema di von Neumann assicura che la rappresentazione delle regole di commutazione è unica a meno di trasformazioni unitarie, quindi i due modelli sono connessi da una trasformazione unitaria, che è appunto la (9.27). La dimostrazione dell'equivalenza tramite il teorema di von Neumann è il corrispettivo quantistico dell'equivalenza tramite trasformazioni canoniche.

L'invarianza della fisica per trasformazioni del tipo (9.27) è molto soddisfacente da un punto di vista di principio. Sappiamo che in meccanica quantistica gli stati sono rappresentati da raggi in uno spazio di Hilbert, o, in parole povere, da funzioni a quadrato sommabile definite a meno di una fase globale. La (9.27) implica che in presenza di un accoppiamento elettromagnetico la fase può essere scelta in modo arbitrario *localmente*, cioè punto per punto. Se immaginiamo l'operazione di scegliere la fase come una scelta di un sistema di riferimento, per gli stati, la (9.27) asserisce che questa scelta può essere fatta in modo *locale*¹.

Avendo ormai (sperabilmente) convinto il lettore dell'invarianza della fisica per trasformazioni di gauge passiamo al punto realmente nuovo della meccanica quantistica rispetto alla meccanica classica. Mettiamo a confronto le equazioni del moto classiche, (9.1) e l'equazione di Schrödinger, (9.26a).

¹ L'analogia non è campata in aria: l'introduzione di una simmetria simile alla (9.27), in un altro ambito, è stata fatta da Weyl proprio per estendere il concetto di invarianza per cambiamenti di coordinate nell'ambito della relatività generale.

- 1) In meccanica classica l'evoluzione di un sistema dipende *solo* dai campi \mathbf{E}, \mathbf{B} , come è chiaro dalla (9.1). Per comodità è possibile introdurre i potenziali Φ, \mathbf{A} , ma questi costituiscono delle quantità ausiliarie e non strettamente necessarie.
- 2) Nell'equazione di Schrödinger compaiono i potenziali, non i campi. Vista l'invarianza di gauge sembrerebbe che in realtà anche in questo caso l'uso dei potenziali sia ridondante, ma non è del tutto vero.

Prima di giustificare le affermazioni precedenti facciamo una breve “incursione” sul significato geometrico della trasformazione di gauge (9.27) e dei potenziali.

9.1.2 Interpretazione geometrica dell'invarianza di gauge.

Per semplicità ci limiteremo al caso in cui sia presente solo un potenziale vettore \mathbf{A} , indipendente dal tempo, quindi si ha un campo magnetico $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, mentre il campo elettrico è nullo, oppure statico. Ci limiteremo quindi allo studio delle trasformazioni di gauge indipendenti dal tempo.

Supponiamo di voler insistere sull'arbitrarietà *locale* della fase della funzione d'onda, come espresso nella (9.27): questo significa che in ogni punto dello spazio si può scegliere ad arbitrio la fase di ψ , variando Λ . Questo pone immediatamente un problema: nello scrivere la dinamica occorre confrontare il valore della funzione d'onda in punti diversi, perchè occorre definire le derivate e quindi effettuare dei limiti del tipo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(x+h, y, z) - \psi(x, y, z)}{h} \quad (9.30)$$

Ma come è possibile che la (9.30) abbia alcun senso visto che la fase della funzione ψ in punti diversi è arbitrariamente diversa? In effetti la (9.30) non ha, di per sè, molto senso. Una situazione analoga si presenta in geometria. Supponiamo di considerare una sfera S_2 (una superficie sferica in \mathbb{R}^3). In ogni punto P della sfera è definito un piano tangente e corrispondentemente dei vettori, che normalmente si indicano con la notazione $\mathbf{v}(P)$, indicando appunto che si riferiscono al piano tangente passante per P . Se si considerano due punti diversi, P, Q ha senso confrontare i vettori nei due punti? In generale no, visto che si tratta di vettori in spazi vettoriali distinti. Ma se si vuole fare calcolo differenziale su questi vettori occorre per forza confrontarli, altrimenti come si fanno a definire le derivate? La risposta è che occorre definire una procedura per “trasportare” un vettore $w(Q)$ nel punto P , ottenendo un vettore $w_T(P)$, dopo di che si hanno due vettori definiti nello stesso spazio tangente e quindi possiamo fare tutte le derivate del caso. Ogni modo di trasportare un vettore definisce un diverso modo di fare le derivate, o come si dice in modo sofisticato, definisce una *connessione*. Il lettore che ha qualche conoscenza di relatività generale saprà che la connessione usata in quel caso è una particolare connessione, la connessione di Levi Civita, che geometricamente consiste nel “trasporto parallelo” dei vettori. Questa costruzione puramente geometrica ha un corrispettivo algebrico: un vettore nello spazio tangente ha un significato indipendentemente dalla scelta del sistema di coordinate sulla sfera, questo si traduce nel fatto che se si cambiano le coordinate le componenti del vettore trasformano secondo una matrice (lo jacobiano della trasformazione di coordinate) dipendente dal punto P . Analogamente il processo di trasporto parallelo fa sì che le derivate del vettore trasformino in maniera corretta per cambiamento di coordinate e quindi abbiano un senso geometrico indipendente dalla scelta particolare delle coordinate.

Proviamo a “tradurre” questo procedimento nel caso della trasformazione di gauge. Qui la legge di trasformazione è data dalla (9.27), quindi noi vorremmo definire un “trasporto” e conseguentemente una derivata D_i in modo tale che per trasformazioni di gauge

$$D_i \psi \rightarrow D_i^\Lambda \psi_\Lambda = e^{i \frac{e\Lambda}{\hbar c}} D_i \psi \quad (9.31)$$

La derivata usuale sicuramente non va bene perchè

$$\partial_i \psi_\Lambda = e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} \left(i\frac{e}{\hbar c} (\partial_i \Lambda) \psi + \partial_i \psi \right) \quad (9.32)$$

cioè trasforma in modo inhomogeneo. Ma ora si capisce finalmente il perchè della combinazione $\mathbf{p} - e/c\mathbf{A}$! Consideriamo l'operatore

$$D_i = \partial_i - i\frac{e}{\hbar c} A_i \quad \frac{\hbar}{i} \mathbf{D} \equiv \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (9.33)$$

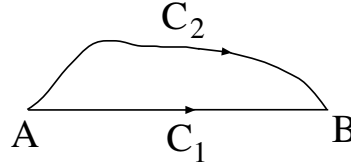
Per trasformazioni di gauge la variazione $\mathbf{A}^\Lambda = \mathbf{A} + \nabla \Lambda$ cancella esattamente il termine non omogeneo nella (9.32) e risulta

$$\left(\nabla - i\frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}^\Lambda \right) \psi_\Lambda = e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} \left(\nabla - i\frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \right) \psi \equiv e^{i\frac{e\Lambda}{\hbar c}} \mathbf{D} \psi \quad (9.34)$$

\mathbf{D} si chiama *derivata covariante* e \mathbf{A} è la connessione che serve per costruire la derivata. Ovviamente cambiando \mathbf{A} cambia la derivata covariante. Costruiamo ora esplicitamente il trasporto generato dalla connessione \mathbf{A} . Cominciamo col notare che considerando l'integrale lungo un cammino C da un punto A ad un punto B si ha, sotto trasformazione di gauge $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Lambda$:

$$\Phi(A, B; C) \equiv \int_{C, A}^B A_i dx^i \rightarrow \int_A^B A_i dx^i + \Lambda(B) - \Lambda(A) \quad (9.35)$$

L'integrale (9.35) dipende esplicitamente dal cammino di integrazione. Infatti cambiando cammino come nella figura accanto e usando il teorema di Stokes



$$\Phi(A, B; C_1) - \Phi(A, B; C_2) = \oint A_i dx^i = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \equiv \text{flusso di } \mathbf{B} \quad (9.36)$$

La formula (9.36) è il punto importante: la differenza degli integrali di cammino della connessione è uguale al flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimita dai due cammini. Notiamo due cose importanti;

- 1) Il risultato (9.36) è *invariante di gauge*, essendo espresso in termini del campo elettromagnetico.
- 2) La (9.36) *non dipende* da quale superficie S si sceglie, purchè il bordo di S sia costituito dal cammino, chiuso, $C_1 - C_2$. Infatti scegliendo un'altra superficie, S' , avente lo stesso bordo, le due, S, S' delimitano un volume V , e, applicando il teorema di Gauss

$$\int_{S_1} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \int_{S_2} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V dV \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (9.37)$$

Torniamo ora al “trasporto” della funzione d'onda. Il problema nel fare le derivate è che $\psi(\mathbf{y})$ si trasforma in modo diverso da $\psi(\mathbf{x})$ se $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}$. Se però “trasportiamo” la funzione d'onda per mezzo dell'integrale di cammino, allora

$$\tilde{\psi} = \exp\left(-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} \right) \psi(\mathbf{y})$$

si trasforma come $\psi(\mathbf{x})$, come si vede usando la (9.35):

$$\tilde{\psi} = e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} \mathbf{A} d\mathbf{x}} \psi(\mathbf{y}) \rightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c} \int_{\mathbf{x}}^{\mathbf{y}} \mathbf{A} d\mathbf{x}} e^{-i\frac{e}{\hbar c} (\Lambda(\mathbf{y}) - \Lambda(\mathbf{x}))} i\frac{e}{\hbar c} \Lambda(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y}) = e^{i\frac{e}{\hbar c} \Lambda(\mathbf{x})} \tilde{\psi}$$

Se allora dobbiamo fare, ad esempio, la derivata in una direzione \mathbf{u} possiamo effettuare le differenze della funzione d'onda senza violare l'invarianza di gauge

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) \psi(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) - \psi(\mathbf{x})] \quad (9.38)$$

Espandiamo in serie di ε l'esponenziale che compare in Φ

$$\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) \sim 1 + \varepsilon \cdot i \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

Per $\varepsilon \rightarrow 0$ i possibili cambiamenti di cammino danno contributi proporzionali ad ε^2 , in virtù della (9.36) (l'area è proporzionale ad ε^2), quindi al primo ordine in ε lo sviluppo di Φ è indipendente dal cammino. Sostituendo nella (9.38) si ha infine

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [\Phi^*(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) \psi(\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{u}) - \psi(\mathbf{x})] = \mathbf{u} \cdot \mathbf{D} \psi \quad (9.39)$$

Quello che abbiamo imparato è che lo strumento essenziale è fornito dal “trasporto parallelo” $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Il punto è che il trasporto serve a far cambiare le proprietà di trasformazione della funzione d'onda ψ , ed in ultima analisi a generare il termine inhomogeneo nella derivata covariante. Per sua natura quindi *non può essere* gauge invariante, dovendo la sua trasformazione combinarsi con quella di ψ . Non è possibile allora costruire dei trasporti paralleli utilizzando quantità come \mathbf{E} e \mathbf{B} , che sono gauge invarianti. Questo è il motivo geometrico fondamentale per cui in teoria quantistica il ruolo dei potenziali è insostituibile: servono a permettere il confronto della funzione d'onda in punti diversi.

Questo ruolo fondamentale dei potenziali porta con sé una conseguenza notevole che non ha un corrispettivo in meccanica classica: le proprietà della teoria **dipendono dalla topologia**. Per illustrare questo punto consideriamo in modo più dettagliato la relazione fra campi e potenziali, ed in ultima analisi l'invarianza di gauge. Dato un campo \mathbf{B} supponiamo di aver determinato un potenziale \mathbf{A}_1 tale che $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}_1$. Sappiamo già che questa scelta non è unica, per ogni altra scelta, \mathbf{A}_2 , deve valere $\text{rot}(\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2) = 0$. Quindi il problema è: quali sono i potenziali vettori che danno luogo ad un campo nullo? Per ricordare che questi potenziali corrispondono ad un campo nullo li chiamiamo $\mathbf{\Omega}$. La soluzione più ovvia è quella che abbiamo già implicitamente usato: un campo vettoriale $\mathbf{\Omega}$ ha rotore nullo se esiste una funzione Λ tale che $\mathbf{\Omega} = \nabla \Lambda$, cioè $\mathbf{\Omega}$ è un gradiente, e Λ è la funzione di trasformazione di gauge. Questa però non è l'unica possibilità. Innanzitutto l'irrotazionalità di $\mathbf{\Omega}$ implica il risultato² seguente:

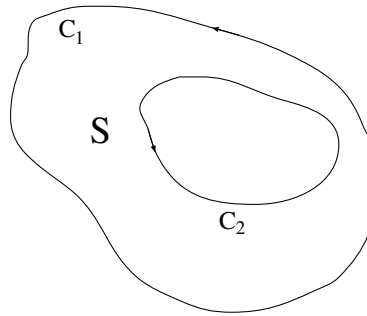
Teorema. *Dati due cammini chiusi deformabili con continuità l'uno nell'altro, l'integrale di $\mathbf{\Omega}$ ha lo stesso valore sui due cammini.*

Infatti applicando il teorema di Stokes ai cammini della figura accanto:

$$\oint_{C_1} \mathbf{\Omega} d\mathbf{x} - \oint_{C_2} \mathbf{\Omega} d\mathbf{x} = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Notiamo esplicitamente che in questa dimostrazione $\mathbf{\Omega}$ deve essere definita in tutta la regione S . Una conseguenza ovvia del teorema precedente è che se un cammino è deformabile con continuità ad un punto l'integrale di $\mathbf{\Omega}$ lungo quel cammino è nullo.

Uno spazio in cui tutti i cammini chiusi siano deformabili con continuità ad un punto si dice *semplicemente connesso*. Abbiamo quindi il risultato:



²Le considerazioni svolte nel seguito lasciano ovviamente molto a desiderare in quanto a rigore, il lettore può approfondire le varie questioni, ad esempio, nei testi[DNF]. Lo scopo della discussione seguente è solo quello di presentare in modo intuitivo alcuni concetti.

Teorema. Se lo spazio è semplicemente connesso e $\text{rot}\mathbf{A} = 0$, allora esiste di sicuro una funzione Λ tale che $\mathbf{A} = \nabla\Lambda$, \mathbf{A} è un campo di pura gauge, cioè annullabile con una trasformazione di gauge.

Infatti scegliamo un punto base O e consideriamo la funzione

$$\Lambda(P) = \int_O^P A_i dx^i \quad (9.40)$$

Se lo spazio è semplicemente connesso l'integrale nella (9.40) non dipende dal cammino di integrazione, perchè la differenza fra due cammini è un cammino chiuso. Siccome $\text{rot}\mathbf{A} = 0$, il teorema di Gauss dice che questo integrale è invariante per deformazione del cammino, ma se lo spazio è semplicemente connesso il cammino può essere ridotto ad un punto, quindi l'integrale è nullo. Questo significa che effettivamente $\Lambda(P)$ è una funzione del punto ed è banale verificare che $\nabla\Lambda = \mathbf{A}$. Se lo spazio non è semplicemente connesso la situazione è più complicata. Ci accontentiamo di citare i seguenti punti. L'insieme dei vettori \mathbf{A} tali che $\text{rot}\mathbf{A} = 0$ formano ovviamente uno spazio vettoriale (di dimensione infinita), nel senso che la loro somma ed i multipli sono ancora a rotore nullo. In generale possiamo "eliminare" da \mathbf{A} la parte che è ottenibile con una trasformazione di gauge, cioè scrivibile come $\nabla\Lambda$, quello che otteniamo è l'insieme dei campi vettoriali a rotore nullo modulo una trasformazione di gauge. Anche questi formano uno spazio vettoriale ed il loro insieme forma il cosiddetto *primo gruppo di Coomologia, di de Rham*, indicato abitualmente con $H^1(X)$. Il punto è che la *dimensione* di $H^1(X)$ è *finita*, e calcolabile naturalmente. Se ad esempio la dimensione è 1, esiste un particolare campo A_1 che ha rotore nullo ma **non è scrivibile** come gradiente di nessuna funzione, la dimensione 1 di H^1 significa che i multipli di A_1 hanno la stessa proprietà, e qualunque altro campo a rotore nullo ha la forma

$$\mathbf{A} = \nabla\Lambda + c\mathbf{A}_1$$

Se $\dim H^1(X) = 0$ significa che tutti i campi irrotazionali sono gradienti, è il caso degli spazi semplicemente connessi. Nell'esempio seguente tratteremo il caso più semplice, che è l'unico di cui avremo bisogno.

Caso $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Consideriamo il piano \mathbb{R}^2 meno un punto, l'origine O per fissare le idee. Chiaramente i cammini chiusi che non contengono O sono contraibili, quelli che contengono O invece non sono riducibili ad un punto. Scriviamo l'integrando nel campo \mathbf{A} in coordinate polari. Notiamo che questo insieme di coordinate è ben definito nell'insieme considerato, in quanto l'origine non fa parte del dominio:

$$A_i dx^i = A_r dr + A_\theta r d\theta \equiv f_r dr + f_\theta d\theta \quad f_\theta \equiv r A_\theta \quad (9.41)$$

Usiamo le componenti $f_r(r, \theta), f_\theta(r, \theta)$ perchè più comode. La condizione di rotore nullo si scrive, in coordinate polari

$$\frac{\partial f_\theta}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta} = 0$$

Possiamo sempre effettuare una trasformazione di gauge, regolare, che annulla f_r , basta considerare

$$\Lambda_1(r, \theta) = - \int_1^r f_r(u, \theta) du$$

evidentemente la trasformazione Λ_1 porta a $f_r \rightarrow f_r + \partial_r \Lambda_1 = 0$. Quindi possiamo limitarci a considerare la sola componente $f_\theta(r, \theta)$ (eventualmente dopo la trasformazione Λ_1). La condizione di rotore nullo ora diventa $\partial_r f_\theta = 0$, cioè f_θ è una funzione solo di θ . f_θ deve essere una funzione definita su tutto l'insieme, quindi **deve** essere periodica (altrimenti, ripetiamo, non è una funzione definita su $\mathbb{R}^2 - \{0\}$), è allora possibile effettuare uno sviluppo di Fourier

$$f_\theta(\theta) = F_0 + \sum_{n \neq 0} (F_n \cos(n\theta) + G_n \sin(n\theta)) \equiv F_0 + R(\theta) \quad (9.42)$$

F_0 è una costante, che è una funzione periodica ovviamente. Notiamo che lo spazio vettoriale associato alle funzioni (9.42) è ancora a dimensione infinita, si ha una coppia di dimensioni per ogni n . La parte non costante della (9.42), $R(\theta)$, è anch'essa eliminabile con una trasformazione di gauge, basta considerare

$$\Lambda_2 = - \int_0^\theta R(\theta) d\theta$$

Λ_2 è periodica in θ , quindi ben definita. Rimaniamo allora con l'unica espressione

$$A_i dx^i = F_0 d\theta \quad (9.43)$$

Questo campo **non è ottenibile** da un gradiente, perchè dovrebbe essere $\Lambda = -F_0 \theta$, ma questa funzione *non è periodica* quindi non è una funzione definibile sul nostro insieme $X = \mathbb{R}^2 - \{0\}$. In questo caso quindi tutti i potenziali a rotore nullo non eliminabili con una trasformazione di gauge sono del tipo $c \cdot d\theta$, quindi lo spazio H^1 ha dimensione 1, come spazio vettoriale su \mathbb{R} . È piuttosto semplice dimostrare che se dal piano si “tolgono” N punti, si ottiene uno spazio di potenziali non banali di dimensione N , praticamente gli integrali angolari attorno ad ognuno dei “buchi”.

Lasciamo al lettore la dimostrazione (semplice) che nel caso tridimensionale in cui si sia “tolta” una retta, si ha la stessa situazione, cioè l'unico campo non banale a rotore nullo ha solo la componente azimutale, e lo spazio H^1 anche in questo caso ha dimensione 1.

È chiaro che il valore della costante F_0 , gauge invariante per definizione, è ottenibile effettuando l'integrale su un qualunque cammino chiuso che contenga il punto O :

$$\oint A_i dx^i = 2\pi F_0 \quad (9.44)$$

L'integrale chiuso che compare nella (9.44) è quello che normalmente si chiama *flusso magnetico* ed è gauge invariante a vista. È possibile quindi definire delle grandezze gauge invarianti

$$\oint A_i dx^i \quad (9.45)$$

che possono essere non nulli anche in assenza di campo elettrico o magnetico.

Siamo finalmente giunti al punto cruciale: consideriamo una zona di spazio in cui non sono presenti campi elettrici e magnetici. Secondo la meccanica classica il moto in queste zone, a meno di altri tipi di forze, è identico al moto di una particella libera. Se invece i potenziali vettori entrano in modo essenziale nella soluzione dell'equazione di Schrödinger allora se esistono integrali del tipo (9.45) non banali, si devono avere degli effetti osservabili.

Consideriamo per fissare le idee l'equazione di Schrödinger per una particella in presenza di un campo \mathbf{A} , statico, ma a rotore nullo, cioè con $\mathbf{B} = 0$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi \quad (9.46)$$

Sia ψ_1 una soluzione dell'equazione (9.46) nel caso $\mathbf{A} = 0$. In una zona semplicemente connessa dello spazio ci si aspetta che la soluzione della (9.46) sia della forma

$$\psi(\mathbf{x}) = \exp \left(i \frac{e}{\hbar c} \int_0^{\mathbf{x}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right) \psi_1(\mathbf{x}) \quad (9.47)$$

La (9.47) non è altro che una riproposizione della formula per le trasformazioni di gauge, eq.(9.27), in cui abbiamo fatto uso della forma esplicita della trasformazione di gauge, eq.(9.40). Ovviamente la (9.47) soddisfa all'equazione differenziale (9.46), come si verifica banalmente per sostituzione, ma **non è** una soluzione accettabile di quella equazione se il dominio non è semplicemente connesso. Infatti se consideriamo la variazione di ψ lungo

un cammino non contraibile otteniamo fra il valore iniziale e quello finale della funzione, una differenza del tipo:

$$\psi(P) \rightarrow \exp\left(i\frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right) \psi(P) \quad (9.48)$$

Si avrebbe cioè una soluzione non monodroma. Abbiamo già discusso nel corso dello studio della quantizzazione del momento angolare la necessità di avere una funzione d'onda monodroma in \mathbb{R}^3 . Siccome qualunque modello fisico è in ogni caso una schematizzazione più o meno accurata di un modello tridimensionale, la questione della monodromia dovrebbe essere considerata acquisita. Dal punto di vista matematico in alcuni modelli, come ad esempio moti bidimensionali, in cui non interviene il gruppo delle rotazioni tridimensionali, la richiesta di monodromia potrebbe di principio cadere, ma vedremo nei prossimi paragrafi che anche in questo caso, nell'ambito che stiamo studiando, la monodromia è essenziale per l'interpretazione fisica dei risultati.

Il lettore a questo punto potrebbe essere, giustamente, confuso: se la (9.47) soddisfa all'equazione (9.46) in che senso non è una soluzione? Dobbiamo ricordare che la soluzione di un'equazione differenziale è determinata solo una volta che siano fissate le condizioni al contorno. Si hanno due possibilità:

- 1) Si ha a che fare con un problema di tipo diffusione: un elettrone entra in una zona in cui è presente il campo \mathbf{A} , viene eventualmente diffuso, etc. In questo caso la soluzione richiede siano fissate le condizioni al bordo nella forma, tipicamente, del valore della funzione d'onda incidente sul bersaglio. Se il campo \mathbf{A} ha una circuitazione non nulla al di fuori di una regione limitata dello spazio, quindi anche all'infinito, questo fa sì che le condizioni al bordo ammissibili debbano essere compatibili con l'invarianza di gauge, si vedrà esplicitamente che queste sono diverse da quelle libere, e quindi la soluzione non sarà una trasformazione di gauge della soluzione libera.
- 2) Si studia uno stato legato. In questo caso il requisito è sempre quello di avere una funzione d'onda a quadrato sommabile, quello che deve risultare allora è che in presenza di una circuitazione non banale lo spettro dell'Hamiltoniana cambia. Verificheremo che in effetti è così.

Nei prossimi due paragrafi presenteremo due situazioni di questo tipo, il primo per motivi puramente didattici, il secondo, ben più importante, è per certi aspetti uno dei fenomeni più notevoli della meccanica quantistica: *l'effetto Aharonov-Bohm*. Naturalmente la natura obbedisce alle leggi della meccanica quantistica.

NOTA. Il contenuto di questo paragrafo, come già accennato, è stato volutamente presentato in forma molto semplificata. Anche a livello di notazioni sarebbe più utile che il lettore prendesse confidenza con il concetto di forme differenziali e con la teoria ad esse associata. Per la parte matematica il lettore ha moltissime possibilità di scelta, alcune potrebbero essere i testi di Novikov et al.[DNF]. Una trattazione semplificata di moti aspetti topologici delle teorie di gauge si può trovare nel libro di Nash e Sen[NS]. Un testo sulle forme differenziali scritto apposta per i fisici è il libro di [Fla]. Per quanto riguarda la fisica è ovvio che tutta la procedura può essere estesa a campi dipendenti dal tempo, ed in questo modo il ruolo essenziale è svolto dall'integrale

$$\oint A_\mu dx^\mu = \oint c \Phi dt - \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \quad (9.49)$$

Due letture consigliate, sia per la fisica che per la matematica, sono l'articolo originale di Aharonov-Bohm[AB59] e l'articolo di Wu e Yang[WY75].

9.2 Particella carica e solenoide.

Consideriamo il seguente problema: il moto di una particella carica in presenza di un solenoide cilindrico infinitamente lungo, di raggio a e con l'asse coincidente con l'asse z .

Il sistema ha simmetria cilindrica. Supponiamo che il flusso del campo magnetico sia interamente confinato all'interno del raggio a . Il profilo del flusso può avere una forma “semplice”, con una crescita parabolica come nel caso elementare di campo costante, o più addolcita al bordo, la cosa non ha molta importanza, le due possibilità sono illustrate in figura 9.1. Al di fuori del solenoide il flusso ha un valore limite costante, che indicheremo con la lettera F .

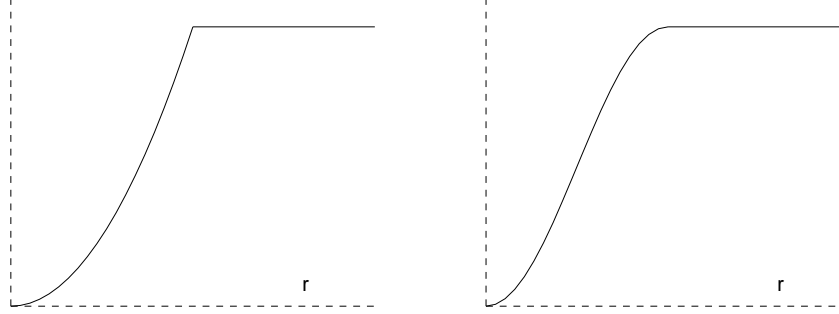


Figura 9.1: Due profili per il flusso magnetico $\Phi(r)$ all'interno di un solenoide.

Usiamo coordinate cilindriche z, r, θ . Il campo magnetico ha solo la componente $B_z \equiv B$ che dipende solo dal raggio r , distanza dall'asse z e si ha $B = B(r)$. Il flusso magnetico è dato da

$$\Phi(r) = \int_0^r 2\pi r' dr' B(r') \quad B(r) = \frac{1}{2\pi r} \Phi'(r) \quad B = 0 \quad \text{per } r > a$$

Abbiamo esplicitamente fatto notare che il campo magnetico è nullo nella zona $r > a$. Un potenziale vettore che corrisponde a questa situazione è dato da

$$A_r = 0 \quad A_\theta = \frac{1}{2\pi r} \Phi(r) \quad A_\theta = \frac{1}{2\pi r} F \quad \text{per } r > a \quad (9.50)$$

come si verifica immediatamente dal teorema di Stokes su un cerchio di raggio r :

$$\oint A_i dx^i = \int_0^{2\pi} A_\theta r d\theta = \Phi(r)$$

Il problema è completamente invariante per traslazioni lungo l'asse z , possiamo quindi ridurci allo studio di un problema bidimensionale. Per comodità del lettore scriviamo le componenti cartesiane del potenziale vettore \mathbf{A} :

$$A_x = -\frac{y}{r} A_\theta \quad A_y = \frac{x}{r} A_\theta \quad (9.51)$$

L'equazione di Schrödinger per un elettrone nel campo del solenoide si scrive

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \psi + V(r) \psi$$

$V(r)$ indica un eventuale potenziale aggiuntivo che descrive l'interazione dell'elettrone con la parete del solenoide (i fili). È più comodo passare a coordinate cilindriche, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Cambiando variabili ed usando le (9.51) si ha:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{e}{c} A_\theta \right)^2 \psi + V \psi \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + \frac{1}{2mr^2} \left(L_z - \frac{e}{2\pi c} \Phi(r) \right)^2 \psi + V \psi \end{aligned} \quad (9.52)$$

In particolare nella zona esterna al solenoide, in cui non c'è campo magnetico, l'equazione di Schrödinger ha la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + \frac{\hbar^2}{2mr^2} \left(\frac{L_z}{\hbar} - \frac{e}{2\pi\hbar c} F \right)^2 \psi + V\psi \quad (9.53)$$

Il termine costante, proporzionale ad F , non può essere riassorbito da una trasformazione di gauge regolare. In effetti questo termine sarebbe eliminato, nella zona $r > a$, dal cambiamento di variabili

$$\psi = \exp(i\theta \frac{e}{2\pi\hbar c} F) \psi_1 \quad (9.54)$$

che è proprio la trasformazione di gauge (non regolare) (9.47). Questa trasformazione è regolare, cioè lascia monodrome le funzioni d'onda, solo per particolari valori, quantizzati, del flusso magnetico:

$$\boxed{\frac{e}{2\pi\hbar c} F = \frac{e}{\hbar c} F = n \in \mathbb{Z} \quad F = n \frac{\hbar c}{e}} \quad (9.55)$$

Questo è uno degli aspetti più sorprendenti della meccanica quantistica: l'integrale di flusso non compare in una forma generica, ma solo come **fase** della funzione d'onda. In quanto tale il suo significato è solo modulo 2π , quindi per multipli di 2π la sua azione è assolutamente nulla. I veri gradi di libertà associati alla topologia non banale del problema sono perciò³

$$\exp(i \frac{e}{\hbar c} \oint A_i dx^i)$$

La risoluzione di un'equazione come la (9.53), o la (9.52), passa attraverso la determinazione degli autovalori di L_z . Per funzioni *monodrome* sappiamo scrivere autofunzioni ed autovalori di questo operatore:

$$L_z \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \hbar \ell \psi \quad \psi = \exp(i\ell\theta) \quad \ell \text{ intero} \quad (9.56)$$

Per $\ell \in \mathbb{Z}$ le funzioni (9.56) sono monodrome. A priori, come già accennato, e come visto in alcuni esempi nel capitolo [?], sarebbe possibile definire un operatore L_z con autofunzioni non monodrome, il che significherebbe avere autovalori ed autofunzioni del tipo

$$\kappa = \ell + \beta \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad \psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta) e^{i2\pi\beta}$$

L_z è la terza componente del momento angolare e, ricordiamo, è definito tramite le variabili *canoniche* x, p . In presenza di un campo \mathbf{A} , \mathbf{L} non è il momento cinetico $\mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$, vedi (9.7). Ricordiamo che classicamente L_z è un invariante adiabatico

$$L_z = \frac{1}{2\pi} \oint d\theta p_\theta$$

Se assumiamo che in assenza di solenoide L_z sia quantizzato per interi, allora questo deve essere quantizzato per interi anche per incremento adiabatico del flusso magnetico, appunto perchè L_z è un invariante adiabatico. Se lasciassimo cadere questa condizione si perderebbe la corrispondenza fra invarianti adiabatici classici e autovalori quantistici. Notiamo che questa sarebbe proprio la conseguenza se assumessimo che una funzione d'onda avesse una non monodromicità legata al fattore di fase del campo \mathbf{A} . In questa descrizione la presenza di \mathbf{A} sarebbe riassorbita nella forma

$$\exp(i \frac{e}{\hbar c} \int_O^P A_i dx^i) \psi$$

³Questo punto è particolarmente messo in evidenza nelle referenze[AB59, WY75] che il lettore può utilmente consultare.

e questa funzione, per una rotazione di 2π di P attorno al punto O , acquisterebbe una fase

$$\exp(i \frac{e}{\hbar c} \oint A_i dx^i) = \exp(i \frac{eF}{\hbar c})$$

Ripetiamo: l'invarianza adiabatica di L_z implica che i suoi autovalori non debbano cambiare per incremento adiabatico del flusso magnetico, in questo caso la monodromia delle funzioni d'onda è obbligatoria.

Per capire le conseguenze osservabili di quanto asserito consideriamo un modello ultrasemplificato: supponiamo che la particella si possa muovere solo su un cerchio di raggio R . In questo caso gli autovalori dell'energia sono determinati da

$$E\psi = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(\frac{L_z}{\hbar} - \frac{eF}{2\pi\hbar c} \right)^2 \psi \quad E = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(\ell - \frac{eF}{2\pi\hbar c} \right)^2 \quad (9.57)$$

La (9.57) rende esplicitamente conto di alcune delle cose discusse precedentemente:

- 1) L'Hamiltoniana quantistica (9.55) **non** è unitariamente equivalente ad un'Hamiltoniana senza potenziale vettore: in effetti per trasformazioni unitarie lo spettro è invariante, mentre lo spettro (9.57) è diverso da quello libero.
- 2) Si può avere una equivalenza unitaria solo per $\frac{eF}{2\pi\hbar c} \in \mathbb{Z}$, nel qual caso lo spettro (9.55) coincide con quello libero. La trasformazione unitaria è proprio la (9.54), che in questo caso è ben definita.

Vogliamo concludere l'analisi di questo modello con alcune considerazioni.

- a) Supponiamo di non considerare la monodromia delle funzioni d'onda e di effettuare lo stesso la trasformazione (9.54). L'Hamiltoniana risultante sarebbe

$$H = \frac{\hbar^2}{2mR^2} \left(-\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2$$

che è quella libera. Si riotterrebbero logicamente i risultati precedenti assumendo ora una non monodromia della funzioni d'onda. Possiamo sfruttare questa osservazione in questo modo: supponiamo di avere un modello, bidimensionale, in cui possano essere presenti discontinuità topologiche, che nel nostro contesto sono tagli (cioè discontinuità) nel piano xy , queste possono essere riformulate in termini di un problema senza discontinuità pur di introdurre un potenziale vettore che fa le veci del campo di gauge \mathbf{A} . Questo è un tipo di approccio usato in diversi modelli utilizzati per spiegare proprietà collettive in fisica dello stato solido.

- b) In meccanica classica l'Hamiltonia (9.55) si scrive

$$H = \frac{1}{2mR^2} \left(L - \frac{eF}{2\pi c} \right)^2 \quad (9.58)$$

Lo spazio delle fasi del sistema è il cilindro $[0, 2\pi] \times \mathbb{R}$, corrispondente alle variazioni di θ e di L , che non è quantizzato classicamente. θ, L sono le variabili coniugate del sistema ed L è la variabile di azione. In questo contesto la trasformazione

$$L \rightarrow L + \frac{eF}{2\pi c} \quad (9.59)$$

è una trasformazione canonica, quindi il sistema (9.58) è equivalente al sistema libero, in accordo col fatto che le particelle classiche sono soggette solo ai campi elettrici e magnetici, non risentono direttamente dei potenziali. In meccanica quantistica invece, in cui lo spettro di L è quantizzato, la trasformazione (9.58) non è permessa: anche a livello semiclassico è ovvio che non lascia invariate le condizioni di quantizzazione di Bohr-Sommerfeld $L = nh$. Questo è forse l'esempio più semplice del fatto che in generale non tutte le trasformazioni canoniche classiche corrispondono a trasformazioni unitarie quantistiche.

c) Dalle eq.(9.57) segue che le autofunzioni del sistema sono:

$$\psi_\ell(\theta, t) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{i\ell\theta - i\frac{1}{\hbar} E_\ell t} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp \left[i\ell\theta - it \frac{\hbar}{2mR^2} \left(\ell - \frac{eF}{2\pi\hbar c} \right)^2 \right] \quad (9.60)$$

È quindi abbastanza semplice calcolare il propagatore:

$$K(\theta, t; \theta', 0) = \sum_\ell \psi_\ell(\theta, t) \psi_\ell^*(\theta', 0) \quad (9.61)$$

Ricordiamo che il propagatore definisce l'ampiezza di probabilità di passare da una posizione θ' all'istante 0 alla posizione θ all'istante t , e vale la relazione

$$\psi(\theta, t) = \int d\theta' K(\theta, t; \theta', 0) \psi(\theta', 0)$$

La somma (9.60) si valuta facilmente utilizzando la formula di Poisson per le somme, vedi appendice 9.A

$$\begin{aligned} K(\theta, t; \theta', 0) &= \left[\frac{mR^2}{2\pi i \hbar t} \right]^{1/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{imR^2}{2\hbar t} (\theta - \theta' - 2\pi n)^2 + \frac{ieF}{2\pi\hbar c} (\theta - \theta' - 2\pi n) \right] \\ &= \sum_n K_n^0(\theta, t; \theta', 0) \exp \left[\frac{ieF}{2\pi\hbar c} (\theta - \theta' - 2\pi n) \right] \end{aligned} \quad (9.62)$$

La relazione (9.62) è molto istruttiva. I singoli termini $K_n^0(\theta, t; \theta', 0)$ sono i propagatori per una particella libera (come se θ non descrivesse un moto angolare), e possono essere interpretati come l'ampiezza per il passaggio $\theta' \rightarrow \theta$ dopo aver compiuto n giri. I fattori di fase aggiuntivi:

$$\exp \left[\frac{ieF}{2\pi\hbar c} (\theta - \theta' - 2\pi n) \right] \quad (9.63)$$

sono esattamente gli integrali di fase lungo questi cammini

$$\exp \left(i \frac{e\hbar}{c} \int_i^f A_i dx^i \right)$$

che si dovrebbero effettuare per riassorbire il potenziale vettore se lo spazio fosse semplicemente connesso! Notiamo il ruolo fondamentale giocato dal principio di sovrapposizione: i singoli termini nella (9.62) non sono periodici ed in particolare il fattore di fase (9.63) non lo è, ma la somma delle ampiezze è periodica. Il lettore non mancherà di osservare la stretta analogia con la costruzione di de Broglie: nell'espressione “ondulatoria” (9.60) della funzione d'onda la monodromia è proprio all'origine della quantizzazione di L , nell'interpretazione “corpuscolare” (9.62) questa periodicità è evidente solo se si somma su tutte le possibili traiettorie $\theta' \rightarrow \theta$, ognuna topologicamente non riconducibile all'altra. Questo tipo di considerazioni compaiono spesso quando, con tecniche mutate dalla regola di Poisson, si riesce a dare una descrizione “duale” dei modelli.

Una piccola generalizzazione di questo modello sarà fornita nell'appendice 9.B.

9.3 Effetto Aharonov-Bohm.

In questo paragrafo presenteremo brevemente l'effetto Aharonov-Bohm: si tratta di alcuni effetti sperimentalmente osservabili dei fattori di fase elettromagnetici. Questo tipo di analisi è stata per la prima volta presentata nel fondamentale lavoro [AB59], di cui consigliamo vivamente la lettura.

Consideriamo la classica esperienza di tipo Young, l'interferenza di un fascio elettronico nel caso di una doppia fenditura. Lo schema è riportato in figura 9.2. Ricordiamo che nel caso usuale, senza campo magnetico, la funzione d'onda ψ è approssimabile nella forma

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (9.64)$$

dove ψ_1 e ψ_2 sono le “onde” corrispondenti al passaggio nella parte superiore e inferiore della figura⁴. La differenza di cammino ottico fra i due termini provoca, vedi cap. ?? uno sfasamento relativo

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta\ell \quad \Delta\ell = \frac{2xd}{L} \quad (9.65)$$

dando luogo alle note frange di interferenza nella misura di $|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$.

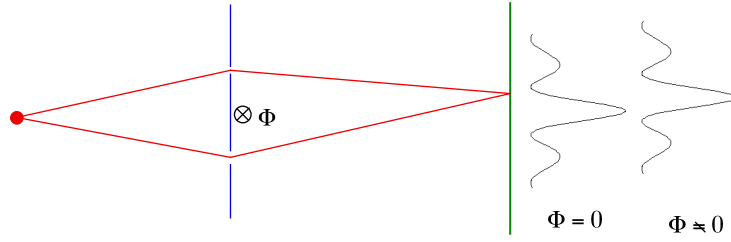


Figura 9.2: Interferenza senza flusso magnetico e con flusso magnetico.

Consideriamo ora l'identica situazione ma con l'aggiunta di un solenoide, infinitamente lungo per semplicità, dietro allo schermo in figura 9.2. Il solenoide può essere considerato impenetrabile al fascio elettronico. Classicamente il suo effetto dovrebbe essere totalmente nullo: il campo magnetico al di fuori del solenoide è nullo. Quantisticamente la situazione è completamente diversa. Al di fuori del solenoide è presente un campo $\mathbf{A} \neq 0$. Il termine ψ_1 nella (9.64) si riferisce alla propagazione (semiclassica) nella regione superiore della figura 9.2, in questa regione, che è **semplicemente connessa**, l'effetto del campo \mathbf{A} è semplicemente quello di aggiungere una fase alla funzione d'onda ψ_1 , cioè in presenza di \mathbf{A} :

$$\psi_1 \rightarrow \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right) \psi_1 \quad (9.66)$$

Ricordiamo che l'integrale nella (9.66) *non dipende* dal cammino, finché restiamo nella zona che non circonda il solenoide.

Analogamente la funzione ψ_2 viene modificata da

$$\psi_2 \rightarrow \exp\left(i \frac{e}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}\right) \psi_2 \quad (9.67)$$

Vediamo allora che la *differenza di fase* fra i due termini nella (9.64) viene modificata per un fattore

$$\frac{e}{\hbar c} \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - \frac{e}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{e}{\hbar c} \Phi \quad (9.68)$$

Corrispondentemente le differenze di fase (9.65) diventano:

$$\Delta\phi = \Delta\phi|_{\Phi=0} + \frac{e}{\hbar c} \Phi \quad \text{spostamento:} \quad \delta x = \frac{e \lambda L \Phi}{4\pi c \hbar d} \quad (9.69)$$

Si ha quindi uno *spostamento delle frange di interferenza*, modulato dal flusso Φ del campo magnetico nel solenoide. Notiamo che per

$$\frac{e}{\hbar c} \Phi = 2n\pi \quad (9.70)$$

⁴Preciseremo in seguito questa affermazione, vedi anche l'appendice 9.C

l'effetto scompare.

Sottolineiamo che l'effetto di spostamento delle frange non solo mette in luce l'importanza del campo vettoriale \mathbf{A} , ma specifica che esso interviene solo nella forma *gauge invariante* (9.66) e **solo** nella forma di fase, infatti l'effetto scompare per valori della quantità $e\Phi/\hbar c$ multipli di 2π . Della differenza rispetto alla meccanica classica abbiamo già parlato, bisogna anche aggiungere che all'epoca dell'analisi di Aharonov e Bohm, che hanno proposto un esperimento simile a quello di figura 9.2, molti non erano convinti della necessità di introdurre i potenziali vettori nella descrizione della meccanica quantistica. I primi risultati sperimentali erano a favore dell'ipotesi di Aharonov e Bohm confermando la presenza di frange di interferenza che sispostavano al variare del flusso di campo magnetico, ma alcuni aspetti teorici e sperimentali lasciavano aperta qualche spiegazione alternativa. Tale diatriba è stata risolta in modo definitivo in una recente serie di esperimenti sorprendenti fatti al Laboratorio centrale di Hitachi, da Tonomura e dai suoi collaboratori.

La diatriba nasceva dai seguenti aspetti piuttosto delicati, sia sperimentali che teorici, dell'effetto A-B. Prima di tutto, in meccanica quantistica, l'elettrone è descritto da una funzione d'onda, ed è difficile escludere completamente che esso penetri anche nella regione dove è situato il solenoide, $\mathbf{B} \neq 0$. Un altro problema sperimentale è che un solenoide non è mai ideale, non è mai infinitamente lungo, il campo magnetico non è mai completamente contenuto all'interno del solenoide. Inoltre, dal punto di vista teorico, ci sarebbe la possibilità di scegliere la gauge di modo che nelle equazioni appaiono soltanto il campo magnetico \mathbf{B} (o le sue derivate), e non più il potenziale vettoriale \mathbf{A} (gauge di Schwinger). Se tale scelta di gauge fosse legittima, non ci si dovrebbe aspettare nessun effetto A-B, se l'elettrone non passa mai nella regione con il campo magnetico (o se l'apparato sperimentale è costruito di modo che tale probabilità sia comunque trascurabile). Ogni effetto osservato sarebbe da attribuire alla non perfezione dell'apparato.

A quest'ultima obiezione teorica può essere risposta osservando che una gauge in cui il potenziale vettoriale viene eliminata in favore di \mathbf{B} è necessariamente singolare, e perciò non è una scelta accettabile.

Le prime obiezioni sono però più insidiose. L'idea brillante che ha permesso al gruppo di Tonomura di ovviare a questi problemi, sotto il suggerimento di C.N. Yang, è stato quello di ricoprire completamente un anello magnetico microscopico con uno strato superconduttore di Niobio, (Fig.9.3). Si veda la nota seguente su aspetti salienti della superconduttività e del fenomeno della quantizzazione del flusso magnetico.

Facendo attraversare il fascio di elettroni parzialmente dentro e parzialmente fuori il foro e osservando la frange dell'interferenza, si osservano gli effetti alla Aharonov-Bohm. Ma l'osservazione determinante è il fatto che lo spostamento di fase diventa o zero o π , quando il ricoprimento superconduttore dell'anello diventa superconduttore (al di sotto della temperatura critica per Nb, $T_c = 9.2\text{K}$), mentre al di sopra della temperatura critica, $\Delta\phi$ prende un valore generico casuale, dipendente da come il campione è stato preparato.

Si osservi in particolare che

- (i) Il campo magnetico è contenuto all'interno dell'anello superconduttore e non può fuoriuscire (effetto Meissner). Forma un solenoide di forma anulare ideale, *i.e.*, senza le estremità.
- (ii) L'elettrone è schermato dal ricoprimento esterno dell'anello e non può penetrare all'interno.
- (iii) Il flusso magnetico all'interno del anello è quantizzato:

$$\Phi_n = \frac{2\pi c \hbar}{q} n, = \frac{\pi c \hbar}{e} n \quad q = 2e \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9.71)$$

Sostituendo questo nella formula (9.69) si ha che lo spostamento di fase è dato da un multiplo di π , come è effettivamente osservato sperimentalmente. Si noti un

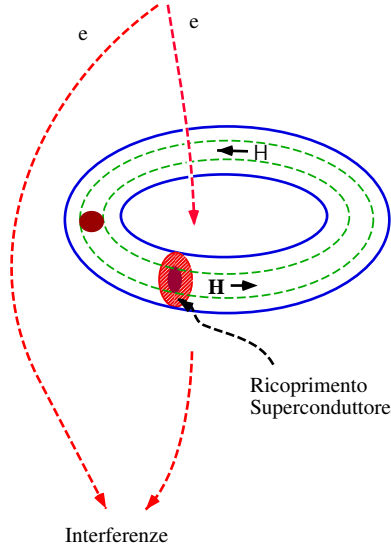


Figura 9.3: Lo schema dell'esperimento di Tonomura et.al.

fattore 2 determinante tra la carica della coppia di Cooper ($q = 2e$), responsabile del meccanismo della superconduttività e che compare nella (9.71) e quella dell'elettrone.

È da notare che questo esperimento rappresenta una doppia verifica, da un lato dell'effetto A-B (nei campioni con lo sfasamento π), dall'altro della quantizzazione di flusso magnetico.

9.3.1 Superconduttore

Riportiamo qui gli aspetti principali della superconduttività nei metalli a temperature estremamente basse, in un campo magnetico esterno. Gli elettroni in un metallo risentono di una interazione reciproca dovuta agli scambi di fononi (eccitazioni del reticolo cristallino) e possono formare stati legati, chiamate coppie di Cooper. A temperature estremamente basse (al di sotto di una temperatura critica, che dipende dalla sostanza) le coppie di Cooper - bosoni - condensano e sono descritte⁵ da una sorta di funzione d'onda macroscopica Ψ .

Le equazioni di Maxwell e la corrente microscopica sono date dalle solite equazioni:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad (9.72)$$

$$\mathbf{j} = q \frac{1}{4m} \left[\Psi^* \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \Psi - \left\{ \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \Psi \right\}^* \Psi \right], \quad (9.73)$$

Abbiamo chiamato $q = -2|e|$ la carica della coppia. m è la massa dell'elettrone, quindi $2m$ è la massa della coppia di Cooper. In generale possiamo scrivere la funzione d'onda Ψ nella forma

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}, \quad \rho(\mathbf{r}) = \Psi^* \Psi \neq 0, \quad (9.74)$$

⁵I bosoni identici debolmente accoppiati tendono a occupare lo stesso stato quantistico. A temperatura al di sotto della temperatura critica, un numero macroscopico dei bosoni occupa lo stato fondamentale (condensazione di Bose-Einstein). Il sistema in tale stato è descritto dalla distribuzione dei numeri di occupazione $d(\mathbf{p})$ o dalla sua trasformata di Fourier, $\Psi(\mathbf{r})$. $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ rappresenta allora realmente la densità, non la densità di probabilità, delle particelle.

Lo stato superconduttore può essere caratterizzato da una densità costante di coppie, quindi $\rho = \text{cost.} \neq 0$.

Nello stato superconduttore, le coppie di Cooper condensano:

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}, \quad \rho(\mathbf{r}) = \Psi^* \Psi \neq 0, \quad (9.75)$$

La corrente (9.73) si scrive quindi

$$\mathbf{j} = \frac{q\rho}{2m} (\hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \mathbf{A}) \quad (9.76)$$

L'equazione di continuità allora implica $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, *i.e.*,

$$\nabla^2 \theta = 0, \quad (9.77)$$

dove è stata assunta la gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. All'interno del superconduttore la (9.77) implica

$$\theta = \text{const.} \quad (9.78)$$

Segue la relazione

$$\mathbf{j} = -\frac{q^2 \rho}{2mc} \mathbf{A}, \quad (9.79)$$

nota come equazione di London. Le equazioni di Maxwell per il campo $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ danno:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{2\pi \rho q^2}{mc^2} \mathbf{A} \equiv \lambda^{-2} \mathbf{A} \quad (9.80)$$

Se consideriamo ora la superficie di un superconduttore, schematizzata come il piano $z = 0$ (il metallo occupa la zona $z > 0$) la soluzione della (9.80) ha la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-z/\lambda}, \quad \lambda = \left(\frac{2\pi \rho q^2}{mc^2} \right)^{-1/2}. \quad (9.81)$$

La (9.81) significa che il campo magnetico è fortemente depresso⁶ in un mezzo superconduttore: \mathbf{B} può penetrare nel corpo di superconduttore soltanto per uno spessore dell'ordine di λ , chiamato lunghezza di penetrazione di London. Con dei parametri appropriati per il piombo, per es., (assumendo che ognuno degli atomi dia un elettrone di conduzione), $\rho \sim 3 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3$, si ha

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{1}{8\pi} \frac{mc^2}{e^2} \frac{1}{10^{22}}} \sim \sqrt{\frac{1}{25} \frac{1}{3 \cdot 10^{-13}} \frac{1}{10^{22}}} \sim O(10^{-5}) \text{ cm}. \quad (9.82)$$

Questo fenomeno, per cui il campo magnetico viene espulso da una sostanza superconduttrice è noto come *effetto Meissner*.

Quantizzazione del flusso magnetico Accade una cosa molto interessante nel caso che la materia superconduttrice ha una forma di un toro (la superficie è topologicamente una superficie toroidale).

Riflettendo il fatto che θ è una variabile angolare, la (9.77) ammette ora una soluzione non banale⁷,

$$\theta(x, y, z) = cz, \quad c = \frac{2\pi n}{T}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (9.83)$$

⁶ Nel gergo della fisica delle particelle, il fotone che media l'interazione elettromagnetica ha acquistato una massa effettiva tramite il meccanismo di Higgs.

⁷ Dal punto di vista matematico, le soluzioni non banali (9.83) rappresentano elementi del gruppo fondamentale di S^1 , $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

dove z è la coordinata lungo il cerchio del toro, T è il periodo, cioè la lunghezza della curva. La situazione è schematicamente illustrata in figura 9.4. In questo caso, $\mathbf{j} \neq \mathbf{A}$, ma vale ancora

$$\nabla^2 \mathbf{j} = -\frac{\rho q}{2mc} \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{j}. \quad (9.84)$$

La (9.83) e la (9.84) implicano che la corrente \mathbf{j} nella direzione z circola soltanto sulla superficie del toro, *i.e.*, in uno strato di spessore dell'ordine di λ ; viceversa, all'interno del toro abbiamo $\mathbf{j} = 0$.

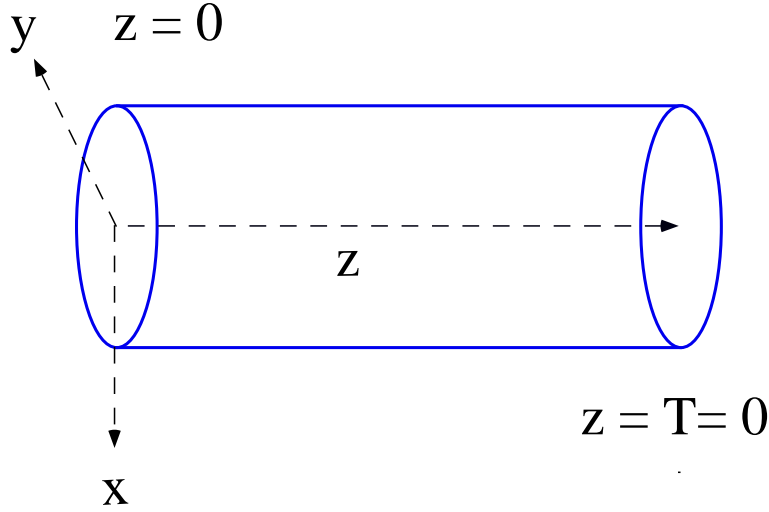


Figura 9.4: Coordinate del toro. Si pensi la superficie a $z = T$ identificata con quella a $z = 0$.

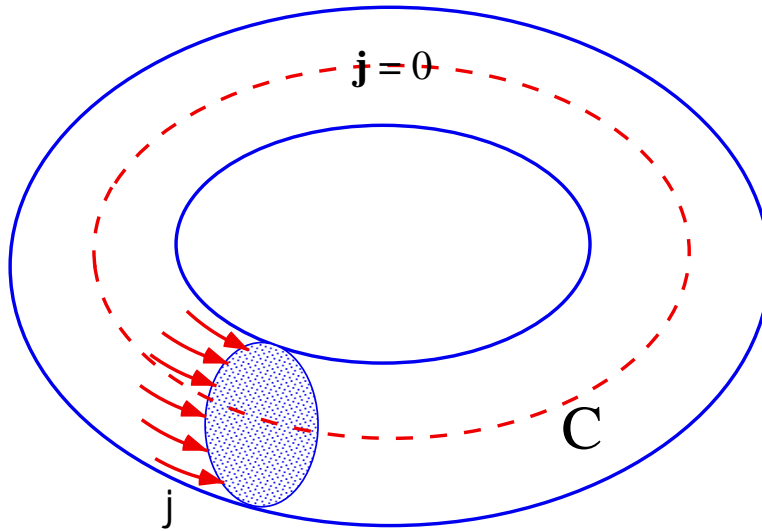


Figura 9.5: Schema di un anello toroidale superconduttore. Il flusso quantizzato è quello concatenato alla circonferenza C .

Quest'ultimo fatto significa che lungo il cerchio al centro del toro (la curva C della

Fig.9.5)) vale

$$\hbar \nabla \theta = \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (9.85)$$

per cui integrando questa equazione lungo C si ha (Eq.(9.83))

$$\frac{q}{c} \oint dx_i A_i = \hbar \int d\theta = 2\pi n \hbar. \quad (9.86)$$

L'ultima uguaglianza discende dalla richiesta di monodromia della funzione Ψ . D'altra parte,

$$\oint dx_i A_i = \int d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \Phi : \quad (9.87)$$

$\oint dx_i A_i$ è uguale al flusso magnetico intrappolato dal toro. Segue perciò che il flusso magnetico che attraversa un toro di superconduttore è quantizzato:

$$\Phi = \frac{2\pi n c \hbar}{q}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (9.88)$$

Questa è la relazione (9.71) usata nel paragrafo precedente.

Indicazioni bibliografiche.

Una trattazione relativamente semplice della superconduttività, e compatibile con una conoscenza elementare della meccanica quantistica, si trova nel terzo volume delle lezioni di Feynman[Fey3].

La letteratura sull'effetto Aharonov Bohm è molto vasta e ci contenteremo qui di indicare alcune fonti che abbiamo trovato particolarmente utili. L'articolo originale di Aharonov e Bohm è del 1959[AB59], negli articoli[AB61] si può trovare una discussione degli autori su vari aspetti del problema. Gli articoli del gruppo guidato da Tonomura[To1], possono essere utilmente integrati dall'articolo di rivista[To2]. Una istruttiva rassegna, anche per gli aspetti sperimentali, è il libro di Peshkin e Tonomura[PT], è altresì utile la rassegna di Olariu e Iovitzu Popescu[OIP]. In queste due ultime opere si trovano molte referenze e discussioni, anche per quanto riguarda i risultati sperimentali precedenti i lavori di Tonomura e non citati nella nostra brevissima presentazione.

Due articoli molto interessanti, soprattutto per gli aspetti che saranno trattati più in dettaglio nell'appendice 9.C sono quelli di Berry[Ber1] e di Jackiw e Redlich[JR83]. L'articolo di Wu e Yang[WY75] è la referenza standard per l'introduzione del concetto di integrale di cammino del campo A_μ come variabile essenziale in meccanica quantistica.

9.4 Interazione di dipolo e quadrupolo elettrico.

Consideriamo l'energia di interazione elettrostatica di un insieme di particelle cariche in un campo esterno Φ :

$$U = \sum_i e_i \Phi(x_i) \equiv \int d^3x \rho(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}) \quad \rho(\mathbf{x}) = \sum_i e_i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \quad (9.89)$$

La variabile \mathbf{x} nella (9.89) è una coordinata rispetto ad un'origine arbitraria. Abbiamo scritto per comodità la (9.89) intermini di una densità di carica ρ . Spesso si devono studiare sistemi con una estensione limitata⁸ rispetto alle scale tipiche di variazione del potenziale esterno, se d è la dimensione del sistema:

$$d|\nabla\Phi| \ll 1$$

⁸Nel caso quantistico significa che i supporti delle funzioni d'onda sono concentrati nella zona in esame, ed al di fuori, tipicamente, decrescono esponenzialmente.

in questo caso il potenziale Φ è quasi costante sul sistema e quindi è utile effettuare uno sviluppo in serie. Consideriamo un'origine O all'interno del sistema, sia ξ la coordinata relativa a questa origine, possiamo allora scrivere

$$\Phi(\mathbf{x}) \simeq \Phi(O) + \partial_i \Phi(O) + \frac{1}{2} \xi_i \xi_j \partial_i \partial_j \Phi(O) + \dots \quad (9.90)$$

Tutte le varie funzioni saranno d'ora in poi intese come calcolate in O e tralasceremo questa indicazione. Sostituendo nella (9.89) ed usando la definizione di campo elettrico (statico) $E_i = -\partial_i \Phi$:

$$U = \int d^3 \xi \rho(\xi) \left[\Phi - \xi \mathbf{E} \frac{1}{2} \xi_i \xi_j \partial_i \partial_j \Phi + \dots \right] \quad (9.91)$$

Discutiamo separatamente i vari termini di questa espressione.

Carica. Il primo termine è

$$\int d^3 \xi \rho(\xi) \Phi = \sum_i e_i \Phi = Q \Phi \quad (9.92)$$

Q è la carica totale del sistema. È l'energia potenziale elettrostatica del sistema, trattata come un tutt'uno. Notiamo che questo termine per traslazioni dell'origine delle coordinate, $O \rightarrow O - \mathbf{a}$, cambia, per piccoli \mathbf{a} , di $-\mathbf{a} \nabla \Phi$, quindi è invariante al primo ordine solo se $Q = 0$, in ogni caso è invariante all'ordine 0, quindi ha un senso ben definito.

Dipolo. Il secondo termine nella (9.91) si scrive

$$-\mathbf{E} \cdot \int d^3 \xi \rho(\xi) \xi = -\mathbf{E} \cdot \sum_a e_a \xi_a \quad (9.93)$$

L'operatore

$$\mathbf{d} = \sum_a e_a \xi_a \quad (9.94)$$

si chiama, come è noto, **momento di dipolo** del sistema, o brevemente dipolo. Notiamo che la definizione (9.94) è invariante per traslazioni del sistema di riferimento solo nel caso di carica totale nulla.

Facciamo comunque una osservazione che ci servirà anche in seguito. L'utilità di usare i momenti di dipolo, quadrupolo etc. consiste nel fatto di considerare via via delle strutture più complicate per un sistema di particelle. Quindi all'ordine zero il sistema sarà rappresentato dalla sua massa e dalla carica elettrica Q , poi si introdurrà il dipolo, il quadrupolo etc. Una particella elementare, l'ordine zero in questa descrizione, è rappresentata da un ket della forma

$$|\mathbf{P}, S, S_z\rangle \quad (9.95)$$

Dove \mathbf{P} è l'impulso totale del sistema, S lo spin. La variabile coniugata a \mathbf{P} è la coordinata del centro di massa e lo spin, per un sistema composto, è *definito* dal momento angolare nel sistema del centro di massa. Quindi se vogliamo continuare ad usare questi numeri quantici dopo aver introdotto il dipolo, il quadrupolo etc, converrà continuare ad usare un sistema di riferimento con origine nel C.M. Notiamo che il centro di massa del sistema non necessariamente coincide col centro di carica.

Il dipolo ha alcune regole di selezione particolarmente importanti. Consideriamo il problema nel sistema del centro di massa, tralasceremo l'indicazione del numero quantico $\mathbf{P} = 0$ nella notazione degli stati.

- 1) Supponiamo che l'Hamiltoniana del sistema sia invariante per parità, esiste allora un operatore unitario P e gli autostati della Hamiltoniana possono essere classificati come autostati contemporanei di H e P . Poiché $P^2 = 1$ e $P^\dagger = P^{-1}$ gli autovalore di

P sono delle fasi, η_P . \mathbf{d} è un vettore polare cioè il suo trasformato per parità cambia segno: $P\mathbf{d}P^{-1} = -\mathbf{d}$ quindi, per ogni autostato di H e P :

$$\langle \psi | \mathbf{d} | \psi \rangle = \langle \psi | P^\dagger P \mathbf{d} P^{-1} P | \psi \rangle = -|\eta_P|^2 \langle \psi | \mathbf{d} | \psi \rangle = -\langle \psi | \mathbf{d} | \psi \rangle = 0 \quad (9.96)$$

Quindi in ogni autostato di questo tipo il valor medio di \mathbf{d} è nullo. Se il sistema è non degenero, (a parte la degenerazione su J_z) **tutti** gli autostati di H sono di questo tipo, quindi non si ha **mai** dipolo permanente su stati stazionari. L'avverbio “mai” è stato usato perchè, come vedremo, in natura esistono sistemi che sono approssimativamente degeneri, ad esempio l'atomo di idrogeno non relativistico, ma questa degenerazione è sempre rimossa. Questo problema sarà ampiamente discusso nel prossimo capitolo.

- 2) Per Hamiltoniane invarianti sotto parità il dipolo ha elementi di matrice solo fra stati a parità opposta, questa è una conseguenza diretta del punto precedente.
- 3) Il dipolo è un vettore, quindi il teorema di Wigner-Eckart impone che può avere elementi di matrice solo fra stati che differiscono al più di 1 in momento angolare. La transizione $0 \rightarrow 0$ è vietata.
- 4) Per le componenti del vettore \mathbf{d} valgono le regole di selezione dettate dal teorema di Wigner-Eckart. Gli unici elementi di matrice non nulli sono della forma:

Per tutti gli elementi di matrice: $J' = J, J \pm 1 \quad 0 \nrightarrow 0$

d_z	$\langle J', J'_z d_z J, J_z \rangle$	$J'_z = J_z$
$d_+ = d_x + id_y$	$\langle J', J'_z d_+ J, J_z \rangle$	$J'_z = J_z + 1$
$d_- = d_x - id_y$	$\langle J', J'_z d_- J, J_z \rangle$	$J'_z = J_z - 1$

Quadrupolo. Le sorgenti del campo esterno sono al di fuori della zona occupata dalle cariche, quindi $\nabla^2 \Phi = 0$ e si può riscrivere il terzo termine della (9.91) nella forma

$$\frac{1}{6} \sum_a e_a \left(3\xi_i^{(a)} \xi_j^{(a)} - (\xi^{(a)})^2 \delta_{ij} \right) \partial_i \partial_j \Phi \quad (9.97)$$

Il tensore

$$Q_{ij} = \sum_a e_a \left(3\xi_i^{(a)} \xi_j^{(a)} - (\xi^{(a)})^2 \delta_{ij} \right) \quad (9.98)$$

si chiama **momento di quadrupolo del sistema**. Q_{ij} è un tensore simmetrico a traccia nulla, quindi trasforma come un momento angolare $J = 2$. È inoltre una quantità pari sotto inversione spaziale. Anche per il quadrupolo si può fare l'analisi sulle trasformazioni sotto traslazioni, per quanto detto definiamo Q_{ij} nel sistema del centro di massa. Si hanno immediatamente le seguenti regole di selezione:

- 1) Q_{ij} ha elementi di matrice solo fra stati con la stessa parità.
- 2) Deve essere

$$\min(|J-2|) \leq J' \leq J+2$$

cioè il momento angolare può cambiare al massimo di 2.

- 3) Si possono scrivere le componenti sferiche di Q_{ij} e queste hanno le stesse regole di selezione delle armoniche sferiche Y_{2m} . In particolare per Q_{zz} si deve avere $J'_z = J_z$.

Il teorema di Wigner-Eckart assicura che all'interno dello stesso multipletto di momento angolare gli elementi di matrice di Q_{ij} possono essere scritti come gli elementi di matrice di

$$Q_{ij} \rightarrow \frac{3Q_J}{2J(2J-1)} \left(J_i J_j + J_j J_i - \frac{2}{3} \mathbf{J}^2 \delta_{ij} \right) \quad (9.99)$$

Il coefficiente Q_J , che coincide con il valor medio di Q_{zz} sullo stato $J_z = J$ (come si verifica immediatamente dalla (9.99)) è ciò che si intende normalmente per momento di quadrupolo. Questo è un punto in cui è particolarmente ovvia la scelta del sistema di riferimento: perchè la (9.99) abbia un senso, per un nucleo ad esempio, \mathbf{J} deve essere lo spin, e questo è il momento angolare del sistema *nel centro di massa*.

Il lettore può trovare maggiori dettagli sull'interazione di quadrupolo nel prossimo capitolo.

9.5 Interazione magnetica.

Classicamente l'interazione elettromagnetica è descritta dalla Hamiltoniana discussa nel paragrafo precedente:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi \quad (9.100)$$

in questo paragrafo cercheremo le correzioni da apportare alla (9.100) per tener conto dello spin. Queste correzioni sono intrinsecamente legate all'invarianza relativistica quindi tratteremo assieme anche questo problema, limitandoci agli ordini più bassi nel parametro v/c , dove v indica la velocità della particella.

Cominciamo a considerare il caso di una particella in un campo magnetico costante \mathbf{B} , ed eventualmente un potenziale Φ , è il caso ad esempio di un elettrone atomico immerso in un campo magnetico (effetto Zeeman). Scrivendo

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \wedge \mathbf{r} \quad (9.101)$$

e sostituendo nella (9.100) abbiamo⁹:

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{e}{mc} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}) \cdot \mathbf{p} + \frac{e^2}{8mc^2} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r})^2 + e\Phi$$

utilizzando la ciclicità del prodotto triplo fra vettori ed introducendo il momento angolare $\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{p}$ possiamo infine scrivere

$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 - \frac{e}{2mc} \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{B} + \frac{e^2}{8mc^2} (\mathbf{B} \wedge \mathbf{r})^2 + e\Phi \quad (9.102)$$

In generale il termine lineare nel campo magnetico nell'Hamiltoniana di interazione descrive il momento magnetico del sistema, quindi che la (9.102) assegna un momento magnetico "orbitale" all'elettrone $\frac{e}{2mc} \boldsymbol{\ell}$ in perfetto accordo con la teoria classica. Come sappiamo $\boldsymbol{\ell}$ è quantizzato in unità di \hbar quindi l'unità di momento magnetico è il cosiddetto *magnetone di Bohr*

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc} \quad (9.103)$$

Consideriamo ora il momento angolare intrinseco \mathbf{s} dell'elettrone. Ci aspettiamo che a questo momento angolare sia associato un momento magnetico, che sarà il momento magnetico intrinseco della particella ed in generale possiamo scrivere

$$\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \quad (9.104)$$

⁹Si usa il fatto che $\nabla_i A_i = 0$ per il campo (9.101).

ed una corrispondente interazione col campo magnetico

$$-\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = -g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \quad (9.105)$$

In ultima analisi il fattore di proporzionalità è fissato misurando l'interazione della particella col campo magnetico, che in totale, per piccoli valori di \mathbf{B} è quindi:

$$H_I = -\frac{e}{2mc} (\ell + g\mathbf{s}) \cdot \mathbf{B} \quad (9.106)$$

Dal punto di vista sperimentale si trova, studiando appunto l'effetto di un campo magnetico sui livelli atomici, come vedremo nel prossimo capitolo, che in ottima approssimazione, per l'elettrone:

$$g = 2 \quad (9.107)$$

Uno dei grandi successi della formulazione relativistica della teoria dell'elettrone, dovuta a Dirac, è stato quello di mostrare come scrivendo l'equazione di Schrödinger relativistica più semplice possibile per una particella con spin 1/2 il valore $g = 2$ venga predetto.

Nota. Invitiamo il lettore a prendere questo tipo di affermazioni “cum grano salis”, per i seguenti motivi:

- Non tutte le particelle cariche di spin 1/2 hanno fattore giromagnetico 2, ad esempio per il protone $g \sim 5.6$. Ci sono anche particelle scariche di spin 1/2, come il neutrone, che hanno un momento magnetico.
- Il valore sperimentale di g per lo stesso elettrone è leggermente diverso da 2, quando si afferma che la teoria di Dirac predice 2 si vuole in realtà dire che nell'ambito del modello standard delle interazioni fondamentali le correzioni dal valore 2 sono calcolabili, e anzi costituiscono una delle conferme più precise del modello stesso.
- Dal punto di vista teorico il modello che descrive l'accoppiamento dell'elettrone col campo elettromagnetico che fornisce $g = 2$ (a meno di correzioni calcolabili come detto) si basa sul fatto che l'interazione è scrivibile nella forma di combinazione lineare $\mathbf{p} - e/c\mathbf{A}$, come nella (9.100). Nello stesso modello standard delle interazioni fondamentali ci sono altra particelle, come i bosoni W delle interazioni deboli, che non hanno solo un accoppiamento di questo tipo.

Riassumendo: l'affermazione che la teoria di Dirac prevede $g = 2$ è corretta ma in un senso più complicato di quello che normalmente si trova sui libri di testo elementari.

9.5.1 Interpretazione semiclassica.

Classicamente il momento angolare \mathbf{S} di un corpo dotato di momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ ha un moto di precessione attorno al campo, descritto dalle equazioni

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{B} \quad (9.108)$$

vale a dire il campo \mathbf{B} esercita un momento della forza pari a $\boldsymbol{\mu} \wedge \mathbf{B}$. Poichè $\boldsymbol{\mu}$ è proporzionale a \mathbf{S} dalla (9.108) segue che $\mathbf{S} \cdot \frac{d\mathbf{S}}{dt} = 0$, cioè si ha in effetti una pura rotazione del vettore \mathbf{S} , che lascia inalterato il modulo.

Indicando con il versore $\boldsymbol{\zeta}$ la direzione di \mathbf{S} e di $\boldsymbol{\mu}$ la (9.108) si riscrive

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = \frac{\mu}{S} \boldsymbol{\zeta} \wedge \mathbf{B} \quad (9.109)$$

La velocità angolare di precessione è perciò $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\mu}/S$.

Esercizio 1. Considerare il campo \mathbf{B} diretto lungo l'asse z , scrivere in componenti cartesiane il versore $\boldsymbol{\zeta}$ e verificare esplicitamente questa affermazione.

Il teorema di Larmor, che è quanto spiegato all'inizio del paragrafo, afferma che per un momento angolare orbitale \mathbf{L} il momento magnetico è dato da $\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} \mathbf{L}$, in generale poniamo $\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2mc} \mathbf{S}$. A priori, classicamente, il valore di g non è fissato, ad esempio se si immagina l'elettrone come una sfera carica che gira su se stessa tale valore dipende dalla distribuzione di carica della sfera. Il valore del momento magnetico è:

$$\boldsymbol{\mu} \equiv \mu \boldsymbol{\zeta} = g \frac{e}{2mc} \mathbf{S} = g S \frac{e}{2mc} \boldsymbol{\zeta} \quad \mu = g S \frac{e}{2mc}$$

e per particelle di spin 1/2

$$\mu = \frac{g}{2} \frac{e\hbar}{2mc} = \frac{g}{2} \mu_B \quad (9.110)$$

Alle stesse conclusioni si arriva considerando la media su uno stato classico delle equazioni del moto quantistiche. Le equazioni del moto per lo spin $\mathbf{s} = \hbar/2\boldsymbol{\sigma}$ sono

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, \mathbf{s}] = \frac{i}{2\hbar}[H, \boldsymbol{\sigma}]$$

Ponendo $\boldsymbol{\mu} = g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} = g \mu_B/2 \boldsymbol{\sigma}$, $H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$ si ricava, dalle regole di commutazione delle matrici di Pauli:

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = -\frac{\boldsymbol{\mu}}{\hbar} \mathbf{B} \wedge \boldsymbol{\sigma} \equiv \frac{g\mu_B}{\hbar} \mathbf{s} \wedge \mathbf{B}$$

Il valor medio su uno stato classico definisce la direzione dello spin $\langle \mathbf{S} \rangle = S\boldsymbol{\zeta}$, prendendo la media sullo stato si ottiene la (9.109), usando la definizione (9.110).

9.6 Correzioni relativistiche: interazione LS .

Vediamo ora quali altre modifiche sono da effettuare nella (9.100) per tener conto dello spin. In un atomo semiclassicamente l'elettrone percorre delle orbite con velocità \mathbf{v} sotto l'influenza del campo elettrico coulombiano \mathbf{E} generato del nucleo. Nel sistema di riferimento di quiete dell'elettrone viene perciò percepito un campo magnetico indotto $\mathbf{B}' = \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}$, assumendo $v/c \ll 1$. Ci si aspetta perciò un'interazione del momento magnetico elettronico del tipo

$$H_I = -g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}) \quad (9.111)$$

In realtà questo ragionamento non tiene conto del fatto che il sistema di riferimento di quiete dell'elettrone non è un sistema inerziale: è vero che si può sempre fare una trasformazione che ci conduca, istante per istante, in questo sistema, ma l'accoppiamento fra momento magnetico e campo magnetico descrive la *variazione* di $\boldsymbol{\mu}$, bisogna cioè scrivere delle derivate rispetto al tempo e quindi considerare sistemi di riferimento a tempi diversi, in poche parole bisogna utilizzare le equazioni del moto della particella per seguire il cambiamento di sistema di riferimento. Il modo corretto di affrontare il problema è quello di scrivere l'equazione del moto per la precessione del momento magnetico in modo che valga per qualunque sistema di riferimento. Il risultato finale è molto semplice: il fattore g viene modificato in $g - 1$, questo effetto si chiama *precessione di Thomas*.

Nel caso particolare in cui $g = 2$ la precessione di Thomas dimezza l'accoppiamento. Una trattazione semplificata dell'effetto è data nei complementi. Scriviamo allora l'interazione nella forma:

$$H_I = -(g-1) \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}) = -(g-1) \frac{e}{2m^2 c^2} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{p}) \quad (9.112)$$

Per un campo elettrico generato da un potenziale centrale Φ , come negli atomi,

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi = -\frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \mathbf{r} \quad (9.113)$$

e l'interazione assume la forma:

$$H_I = (g-1) \frac{e}{2m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}) \quad (9.114)$$

Per un campo coulombiano, $\Phi = Z|e|/r$. Ricordando che la carica dell'elettrone è $-|e|$

$$H_I = (g-1) \frac{e^2}{2m^2 c^2} \frac{Z}{r^3} \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\ell} \quad (9.115)$$

L'interazione espressa dalle (9.114), (9.115) prende il nome di *interazione di struttura fine*. La (9.114) indica una correzione alla Hamiltoniana proporzionale a $1/c^2$, quindi è un secondo ordine nelle correzioni relativistiche: un fattore $1/c$ deriva dall'interazione magnetica in quanto tale, l'altro è dovuto al fatto che lo stesso campo magnetico effettivo visto dall'elettrone è dell'ordine di v/c , essendo stato ottenuto da una trasformazione di Lorentz del campo elettrico \mathbf{E} . L'interazione (9.114) è particolarmente interessante perchè in assenza di campi esterni è il primo segnale di come la presenza dello spin possa modificare la dinamica, ed in particolare i livelli energetici. Per un livello con numeri quantici L, S assegnati, se l'Hamiltoniana non dipende dallo spin si deve avere una degenerazione $(2L+1)$ dovuta all'invarianza per rotazioni orbitali, ed una $(2S+1)$ perchè l'Hamiltoniana non dipende da S . Il termine (9.114) è uno scalare, quindi commuta con $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$, ma **non commuta** con \mathbf{L} e \mathbf{S} separatamente: ci aspettiamo perciò che un livello energetico $E(n, L, S)$ venga "disintegrato" in sottolivelli con J fissato. Dalle regole di addizione del momento angolare sappiamo che ci sono $2S+1$ modi di costruire J a partire da una data coppia L, S se $L \geq S$, o $2L+1$ se $S > L$. Ci si aspetta quindi, ad esempio, che un livello np dell'atomo di idrogeno, quindi con spin $1/2$, venga separato in 2 livelli differenti con $J = 1/2, J = 3/2$ I due livelli sono indicati, con ovvia notazione $np_{1/2}, np_{3/2}$.

Esprimendo tutte le lunghezze presenti nella (9.115) tramite il raggio di Bohr $a_B = \hbar^2/me^2$ e scrivendo $\boldsymbol{\ell} = \hbar\mathbf{L}, \mathbf{s} = \hbar\mathbf{S}$ si ha

$$H_I = \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 \frac{e^2}{a_B} \frac{Z}{2} (g-1) \frac{a_B^3}{r^3} \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (9.116)$$

La costante *adimensionale*

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad (9.117)$$

prende il nome di *costante di struttura fine* e determina l'ordine di grandezza dell'effetto: la separazione percentuale dei livelli è dell'ordine di $\alpha^2 \sim 10^{-4}$. In corrispondenza le righe spettrali di transizione mostreranno una sottile struttura, una struttura fine appunto, da cui il nome.

Per un sistema a molti elettroni l'interazione ha la forma

$$H_I = \sum f_i \boldsymbol{\ell}_i \cdot \mathbf{s}_i \quad (9.118)$$

avendo indicato con f_i i termini radiali dei singoli elettroni. La situazione in questo caso è in realtà complicata dal fatto che ogni elettrone sente non solo il campo elettrico centrale del nucleo ma anche quello degli altri elettroni, corrispondentemente l'ipotesi di campo radiale va intesa come una *media* sulle funzioni d'onda degli altri elettroni. In questo caso il momento angolare totale \mathbf{L} è un operatore che commuta con l'Hamiltoniana (per l'invarianza sotto rotazioni spaziali). \mathbf{J} è sicuramente conservato, quindi anche \mathbf{S} commuta con H . In queste ipotesi L, S sono approssimativamente buoni numeri quantici e per ragioni di simmetria, o più in astratto per il teorema di Wigner-Eckart, su un sottospazio dell'Hamiltoniana con L, S assegnati, l'operatore (9.118) ha la forma

$$H_I = A \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} \quad (9.119)$$

dove A è una costante che dipende dal livello. A differenza del caso idrogenoide A può avere a priori anche un segno negativo. Discuteremo questo argomento nello studio degli spettri atomici.

Accanto alle correzioni v^2/c^2 indotte dallo spin, esistono altre correzioni relativistiche che chiaramente influenzano il valore dei livelli energetici ma, essendo indipendenti da \mathbf{s} , non alterano la struttura generale dello spettro. Nei complementi vengono esposte in modo semiclassico queste ulteriori correzioni nel caso di un sistema idrogenoide.

9.7 Interazione Iperfina.

Se un nucleo possiede uno spin in generale possiederà anche un momento magnetico $\boldsymbol{\mu}_N$. Come ordine di grandezza il momento magnetico nucleare è legato al magnetone nucleare¹⁰

$$\mu_N = \frac{|e|\hbar}{m_p c} \quad (9.120)$$

dove m_p è la massa del protone, quindi μ_N è circa 2000 volte più piccolo del magnetone di Bohr. In questo paragrafo esponiamo brevemente come si possa tener conto del momento magnetico nucleare nello scrivere l'Hamiltoniana di un elettrone atomico, in particolare tratteremo l'atomo di idrogeno.

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che in presenza di campo magnetico esterno l'interazione di un elettrone si scrive, al primo ordine nel campo, nella forma

$$H_I = -\frac{e}{mc} \mathbf{A} \cdot \mathbf{p} - g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} = -\frac{e}{mc} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) \quad (9.121)$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo assunto $g = 2$. Il dipolo nucleare $\boldsymbol{\mu}_N$ genera, appunto, un campo di dipolo:

$$\mathbf{A} = \frac{\boldsymbol{\mu}_N \wedge \mathbf{r}}{r^3} \equiv -\boldsymbol{\mu}_N \wedge \nabla \frac{1}{r} \quad \mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A} \quad (9.122)$$

Il calcolo del campo magnetico richiede un pò di cura per trattare la singolarità in $r = 0$. Si ha

$$\mathbf{B} = -\nabla \wedge \left(\boldsymbol{\mu}_N \wedge \nabla \frac{1}{r} \right) = -\boldsymbol{\mu}_N \nabla^2 \frac{1}{r} + (\boldsymbol{\mu}_N \cdot \nabla) \nabla \frac{1}{r} \quad (9.123)$$

Consideriamo ora l'espressione $\partial_i \partial_j (1/r)$, in generale questa presenta delle singolarità per $r = 0$, in forma genericamente di funzioni δ . Negli elementi di matrice le uniche funzioni non nulle nell'origine sono quelle in onda S , quindi a simmetria sferica, possiamo perciò assumere la singolarità a simmetria sferica nella forma

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{r} = \left(\partial_i \partial_j \frac{1}{r} \right)_{reg} + c \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{r^3} \left(\delta_{ij} - 3 \frac{x_i x_j}{r^2} \right) + c \delta_{ij} \delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

effettuando la traccia e ricordando che $\nabla^2 (1/r) = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{r})$ ricaviamo $c = -4\pi/3$ quindi

$$\partial_i \partial_j \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^3} \left(\delta_{ij} - 3 \frac{x_i x_j}{r^2} \right) - \frac{4\pi}{3} \delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

Esplicitando anche il primo termine singolare nella (9.123) si ha

$$\mathbf{B} = -(\boldsymbol{\mu}_N - 3(\boldsymbol{\mu}_N \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}}) \frac{1}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\mu}_N \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (9.124)$$

Utilizzando la (9.122) si ha infine

$$H_I = -\frac{e}{mc} \left(\frac{1}{r^3} \boldsymbol{\mu}_N \cdot \boldsymbol{\ell} \right) - \frac{e}{mc} \left[-(\boldsymbol{\mu}_N \cdot \mathbf{s} - 3(\boldsymbol{\mu}_N \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}) \frac{1}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\mu}_N \mathbf{s} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right] \quad (9.125)$$

Per evitare confusioni sui segni esprimiamo tutti i momenti angolari in unità di \hbar , scrivendo $\mathbf{s} = \hbar \mathbf{S}$ etc., introduciamo il fattore giromagnetico per il nucleo:

$$\boldsymbol{\mu}_N = g_N \frac{|e|\hbar}{2m_p c} \mathbf{S}_N$$

¹⁰Attenzione ai segni in questo paragrafo! Ricordiamo che la carica elettronica e è negativa, $e = -|e|$.

ottenendo, tenendo conto del segno della carica elettronica:

$$H_I = 2g_N|\mu_B\mu_N|\frac{1}{r^3}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}_N + \quad (9.126)$$

$$+ 2g_N|\mu_B\mu_N|\left[\frac{1}{r^3}(3(\hat{\mathbf{r}}\mathbf{S}_N)((\hat{\mathbf{r}}\mathbf{S}) - \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}_N) + \frac{8\pi}{3}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}_N\mathbf{S}\delta^{(3)}(\mathbf{r})\right]$$

Il primo termine ha contribuito nullo in onda S mentre l'ultimo è non nullo solo in onda S , per funzioni cioè che non si annullano nell'origine.

Il secondo termine ha un'apparente singolarità $1/r^3$ ma in realtà non è singolare. La parte orbitale è proporzionale a $X_{ij} = r^2\delta_{ij} - 3x_ix_j$ cioè un tensore simetrico a traccia nulla, un quadrupolo. Consideriamo un elemento di matrice $\langle a|X_{ij}|b\rangle$. Se entrambi gli stati sono in onda S questo elemento di matrice è identicamente nullo per le regole di selezione sul momento angolare, quindi almeno uno dei due stati deve essere in onda p o più alta. In questo caso il prodotto $\psi_a^*\psi_b$ si annulla almeno come r^{1+k} $k \geq 0$. La parte radiale dell'elemento di matrice allora è della forma

$$\int r^2 dr \frac{1}{r^3} r^{1+k}$$

e non presenta singolarità. Se aggiungiamo la regola di selezione sulla parità vediamo anche che gli elementi di matrice $s-p$ sono nulli e l'esponente k delle formule precedenti è addirittura maggiore di 1.

Appendici e Complementi

9.A Formula di Poisson

La formula di Poisson è:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\theta + Tn) = \frac{1}{T} \sum_k \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}k\right) e^{i\frac{2\pi}{T}k\theta} \quad (9.127)$$

dove \tilde{f} indica la trasformata di Fourier. In particolare per $T = 2\pi$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \tilde{f}(k) e^{ik\theta} \quad (9.128)$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F(\theta) = \sum_n f(\theta + Tn)$$

questa è chiaramente una funzione periodica di periodo T espandibile in serie di Fourier

$$F(\theta) = \sum_k c_k e^{i\frac{2\pi}{T}k\theta}$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T d\theta F(\theta) e^{-i\frac{2\pi}{T}k\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T d\theta e^{-i\frac{2\pi}{T}k\theta} \sum_n f(\theta + Tn) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta f(\theta) e^{-i\frac{2\pi}{T}k\theta} = \frac{1}{T} \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}k\right) \end{aligned}$$

che è la (9.127).

Integrali gaussiani.

Ci saranno utili i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2 + bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{b^2/2a} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\frac{1}{2}ax^2 - ibx} = \sqrt{\frac{2\pi i}{a}} e^{-ib^2/2a} \quad (9.129)$$

Il secondo è ottenuto dal primo con la sostituzione $a \rightarrow -ia$, $b \rightarrow -ib$ e va inteso come continuazione analitica.

Propagatore.

Dalle (9.60) e dalla definizione (9.61) segue:

$$K(\theta, t; \theta', 0) = \sum_{\ell} \psi_{\ell}(\theta, t) \psi_{\ell}^*(\theta', 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ik(\theta - \theta')} e^{-it \frac{\hbar}{2mR^2} (k - \frac{eF}{2\pi\hbar c})^2} \quad (9.130)$$

Il secondo esponenziale nella formula precedente si riscrive usando il secondo integrale delle (9.129) con

$$b = k - \frac{eF}{2\pi\hbar c} \quad a = \frac{mR^2}{\hbar t}$$

nella forma

$$e^{-it \frac{\hbar}{2mR^2} (k - \frac{eF}{2\pi\hbar c})^2} = \sqrt{\frac{mR^2}{i2\pi\hbar t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i \frac{mR^2}{2\hbar t} x^2} e^{-i(k - \frac{eF}{2\pi\hbar c})x}$$

cioè è la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{mR^2}{i2\pi\hbar t}} e^{i \frac{mR^2}{2\hbar t} x^2} e^{i \frac{eF}{2\pi\hbar c} x} \quad (9.131)$$

Quindi dalla (9.130) e dalla formula di Poisson (letta da destra a sinistra) si ha, con $x = \theta - \theta'$ nella (9.131):

$$K(\theta, t; \theta', 0) = \sqrt{\frac{mR^2}{i2\pi\hbar t}} e^{i \frac{mR^2}{2\hbar t} (\theta - \theta' + 2\pi n)^2} e^{i \frac{eF}{2\pi\hbar c} (\theta - \theta' + 2\pi n)} \quad (9.132)$$

che coincide con la formula (9.62) usata nel testo.

9.B Oscillatore e stringa magnetica.

Come semplice generalizzazione della particella vincolata ad un cerchio, consideriamo ancora il modello (9.53) in cui il campo magnetico è confinato nell'origine, mentre si ha un potenziale esterno V di tipo armonico che confina il moto. L'Hamiltoniana è perciò

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2mr^2} \left(L_z - \frac{2\pi e}{c} F \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \quad (9.133)$$

Poniamo per brevità

$$\kappa = \frac{L_z}{\hbar} - \frac{2\pi e}{\hbar c} F \quad x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r \quad \frac{\partial}{\partial r} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial x} \quad \varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

L'equazione agli autovalori prende la forma

$$\varepsilon \psi = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi + \frac{\kappa^2}{x^2} \psi + x^2 \psi = -\psi'' - \frac{1}{x} \psi' + \frac{\kappa^2}{x^2} \psi + x^2 \psi \quad (9.134)$$

Posto

$$\psi = x^\kappa e^{-x^2/2} f$$

Si ha

$$x f'' + (1 + 2\kappa - 2x^2) f' + (\varepsilon - 2(1 + \kappa)) x f = 0 \quad (9.135)$$

La soluzione generale della (9.135) è

$$f(x) = C_a {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\kappa}{2}, 1 + \kappa, x^2\right) + C_b (-1)^\kappa x^{-2\kappa} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\kappa}{2}, 1 - \kappa, x^2\right)$$

dove ${}_1F_1(a, c; x)$ è la funzione ipergeometrica confluyente:

$${}_1F_1(a, c; z) = \Gamma(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!} \quad (9.136)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \psi = e^{-x^2/2} & \left[C_a x^\kappa {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\kappa}{2}, 1 + \kappa, x^2\right) + \right. \\ & \left. + C_b (-1)^\kappa x^{-\kappa} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\kappa}{2}, 1 - \kappa, x^2\right) \right] \end{aligned} \quad (9.137)$$

La regolarità nell'origine impone $C_b = 0$ per $\kappa > 0$ e $C_a = 0$ per $\kappa < 0$. Asintoticamente

$${}_1F_1(a, c; z) \sim e^z z^{a-c}$$

quindi se si vogliono soluzioni a quadrato sommabile la serie deve troncarsi, questo può accadere se $a = -n$, nel qual caso la funzione ipergeometrica coincide con i polinomi di Laguerre. Si deve perciò avere

$$\begin{aligned} \kappa > 0: \quad (1 + \kappa) - \frac{\varepsilon}{2} &= -2n & \frac{E}{\hbar\omega} &= 2n + \kappa + 1 \\ \kappa < 0: \quad (1 - \kappa) - \frac{\varepsilon}{2} &= -2n & \frac{E}{\hbar\omega} &= 2n - \kappa + 1 \end{aligned}$$

Gli autovalori dell'energia sono perciò

$$E = \hbar\omega \left\{ 2n + 1 + \left| \ell - \frac{2\pi e}{\hbar c} F \right| \right\} \quad (9.138)$$

Anche in questo caso l'effetto della stringa magnetica è stato quello di uno shift sugli autovalori dell'energia. Poichè $\ell \in \mathbb{Z}$ le autofunzioni sono monodrome.

9.C Complementi sull'effetto Aharonov-Bohm.

In questo paragrafo presentiamo per comodità del lettore i risultati principali ottenuti da Aharonov e Bohm, e perfezionati in lavori successivi, nel caso di un modello esattamente solubile. Lo scopo è quello di mettere in luce i punti delicati ed alcune questioni di principio su cui non abbiamo ritenuto opportuno soffermarci nel testo principale.

Il modello è quello di stringa magnetica, già incontrato nel testo: un solenoide infinitamente sottile che trasporta un flusso di campo magnetico Φ . Si tratta di un problema bidimensionale. Il potenziale vettore ha solo una componente azimutale:

$$A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi r} \quad \Phi = \text{cost.} \quad A_x = -\frac{y}{r} A_\theta \quad A_y = \frac{x}{r} A_\theta \quad (9.139)$$

L'equazione di Schrödinger ha la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + \frac{1}{2mr^2} \left(L_z - \frac{e}{2\pi c} \Phi \right)^2 \psi \quad (9.140)$$

Per situazioni stazionarie, posto come consueto

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (9.141)$$

l'equazione diventa

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 + k^2 \right] \psi = 0 \quad \alpha \equiv -\frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \quad (9.142)$$

La situazione che vogliamo descrivere è quella stazionaria: un fascio elettronico incidente da $x = +\infty$, incontra la stringa magnetica. L'elettrone non può penetrare nel solenoide, e questo è schematizzato dalla condizione

$$\psi(0) = 0 \quad (9.143)$$

Se i potenziali hanno un effetto fisico si deve osservare una diffrazione dalla stringa, dipendente dal flusso Φ . La diffusione del fascio elettronico viene descritta in questo modo: la funzione d'onda asintotica, per grandi r , è scrivibile nella forma¹¹

$$\psi = \psi_{inc.} + \psi_{diff} \sim \psi_{inc.} + f(\theta)(kr)^{-1/2}e^{ikr} \quad (9.144)$$

La dipendenza fa r in ψ_{diff} è quella di un'onda sferica in due dimensioni. Il numero di particelle al secondo che vengono diffuse ad un'angolo compreso tra θ e $\theta + d\theta$ è $|f(\theta)|^2 d\theta$, come si verifica immediatamente calcolando il flusso dell'onda diffusa. Matematicamente quindi bisogna procedere in questo modo:

- 1) Scrivere la funzione d'onda ψ_{in} che corrisponde alla situazione fisica che abbiamo scelto.
- 2) Risolvere l'equazione di Schrödinger (9.140). ψ_{in} è la condizione al bordo.

La determinazione di ψ_{in} è il primo punto delicato. In assenza di stringa un elettrone libero che viaggia lungo l'asse x in direzione negativa sarebbe descritto da una funzione d'onda $\psi = \exp(-ikx)$. Questa funzione però non è consistente come condizione al bordo, non soddisfa asintoticamente l'equazione (9.140) e non è consistente con l'invarianza di gauge. Infatti se si vuole descrivere un flusso costante di particelle occorre fissare ψ in modo che la corrente *gauge invariante*, vedi eq.(9.18):

$$\mathbf{j} = i \frac{\hbar}{2m} [(\nabla\psi)^* \psi - \psi^* (\nabla\psi)] - \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2 \quad (9.145)$$

sia costante. la soluzione è considerare

$$\psi_{in} = \exp(-ikx - \alpha\theta) = \exp(-ikr \cos \theta - \alpha\theta) \quad (9.146)$$

L'intervallo di variazione di θ è $-\pi \leq \theta \leq \pi$. La (9.146) non è periodica in θ , e su questo commenteremo in seguito, ma comunque descrive nella zona $\theta \sim 0$ un'onda incidente che dà luogo ad una corrente gauge invariante costante, come si può verificare usando le componenti cartesiane (9.139) per \mathbf{A} , e le relazioni $\partial_x \theta = -y/r^2$, $\partial_y \theta = x/r^2$. Si ottiene $j_x = -\hbar k/m$, $j_y = 0$, che corrisponde ad un flusso di una particella al secondo che viaggia in direzione dell'asse x negativo.

Cerchiamo una soluzione **regolare**, quindi monodroma, dell'equazione (9.142). La periodicità e la regolarità in θ significa che L_z ha autovalori $\hbar\ell$, con ℓ **intero** quindi si può scrivere

$$\psi = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_\ell R_\ell(r) e^{i\ell\theta} \quad (9.147)$$

e le funzioni d'onda radiali soddisfano a

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (\ell + \alpha)^2 + k^2 \right] R_\ell(r) = 0 \quad (9.148)$$

Passando a variabili adimensionali $z = kr$, vediamo che la (9.148) è la equazione che definisce le funzioni di Bessel, la soluzione generale è

$$AJ_{\ell+\alpha} + BJ_{-(\ell+\alpha)}$$

Poichè $J_\nu(z) \sim z^\nu$ per $z \rightarrow 0$ le soluzioni regolari, vedi eq.(9.143), sono $J_{|\ell+\alpha|}$ e quindi:

$$\psi = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_\ell J_{|\ell+\alpha|}(z) e^{i\ell\theta} \quad (9.149)$$

I coefficienti a_ℓ devono essere determinati in modo da soddisfare la condizione al contorno.

Riportiamo ora i risultati principali di Aharonov Bohm, rimandando al lavoro originale per le dimostrazioni:

¹¹Comenteremo in seguito su questa decomposizione.

1) I coefficienti a_ℓ valgono

$$a_\ell = (-i)^{|\ell+\alpha|} \quad (9.150)$$

2) Separiamo la soluzione (9.149) a seconda del segno di ℓ :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 & \psi_3 &= (-i)^{|\alpha|} J_{|\alpha|}(z) \\ \psi_1 &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} (-i)^{|\ell+\alpha|} J_{|\ell+\alpha|}(z) e^{i\ell\theta} & \psi_2 &= \sum_{\ell=-\infty}^{-1} (-i)^{|\ell+\alpha|} J_{|\ell+\alpha|}(z) e^{i\ell\theta} \end{aligned} \quad (9.151)$$

Si ha subito:

$$\psi_2(r, \theta, \alpha) = \psi_1(r, -\theta, -\alpha) \quad (9.152)$$

Utilizzando lo sviluppo asintotico delle funzioni di Bessel è possibile valutare le somme (9.151):

$$\psi_1 \rightarrow \begin{cases} 0 & \theta < 0 \\ e^{-i\alpha\theta} e^{-ikx} & \theta > 0 \end{cases} \quad \psi_2 \rightarrow \begin{cases} e^{-i\alpha\theta} e^{-ikx} & \theta < 0 \\ 0 & \theta > 0 \end{cases} \quad \psi_3 \sim \mathcal{O}(r^{-1/2})$$

Questo è **esattamente** il risultato aspettato dall'analisi dell'esperimento di interferenza, la soluzione nei due semipiani è asintoticamente una trasformata di gauge della soluzione libera. notiamo che semiclassicamente i momenti angolari $\ell > 0$ corrispondono a traiettorie di elettroni con momento angolare positivo e quindi passanti nel semipiano superiore (almeno per grandi ℓ), viceversa $\ell < 0$ corrisponde a traiettorie nel semipiano inferiore.

3) Per $r \rightarrow \infty$ e $\theta > 1/r$ è possibile valutare lo sviluppo asintotico, compreso il termine di onda divergente, ottenendo:

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha\theta - ikr \cos \theta} + \frac{e^{ikr}}{(2\pi ikr)^{1/2}} \sin \pi \alpha \frac{e^{-i\theta/2}}{\cos(\frac{\theta}{2})} \quad (9.153)$$

Corrispondente ad una sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\sin^2 \alpha}{2\pi k} \frac{1}{\cos^2 \theta/2} \quad (9.154)$$

Notiamo che l'apparente non monodromia della (9.153) è dovuta solamente al fatto che lo sviluppo asintotico delle funzioni di Bessel non è uniforme, usando sviluppi più sofisticati, vedi ad esempio le referenze [Alv] si mostra esplicitamente che la funzione d'onda ψ è monodroma, come d'altronde è stato imposto sin dall'inizio. Notiamo che la sezione d'urto è **periodica** nel parametro di flusso α , confermando le aspettative dell'esperienza con le frange di interferenza.

Un'analisi alternativa dell'equazione (9.142) è fornita nella referenza [Ber1]: una tecnica simile a quella vista nel paragrafo 9.A permette di ottenere la soluzione di Aharonov-Bohm sommando su un intero che rappresenta il numro di "giri" attorno alla singolarità.

Nel caso particolare $\alpha = 1/2$ la somma su ℓ nell'equazione (9.149) può essere effettuata analiticamente il risultato è:

$$\psi = \frac{i^{1/2}}{\sqrt{2}} e^{-i(\frac{\theta}{2} + kr \cos \theta)} \int_0^{[kr(1+\cos \theta)]^{1/2}} \exp(iz^2) dz \quad (9.155)$$

In questo caso la monodromia è evidente: la funzione d'onda ψ è nulla sulla linea $\theta = \pi$.

Vogliamo infine citare il fatto che la soluzione può anche essere scritta nel caso in cui la stringa magnetica sia circondata da un cilindro impenetrabile di raggio $R > 0$, nel limite $R \rightarrow 0$ si riottiene la soluzione di Aharonov-Bohm.

9.C.1 Teorema di Eherenfest.

Abbiamo visto che si ha diffusione in presenza di una stringa magnetica. Visto che il campo magnetico è nullo, come è compatibile questa conclusione con il teorema di Eherenfest? Consideriamo uno stato qualunque ψ e calcoliamo la variazione nel tempo del valor medio dell'impulso, questo è quanto di più simile alla forza si possa definire in un contesto quantistico:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= m \frac{d}{dt} \int [\psi^* \mathbf{v} \psi] = \frac{i}{\hbar} \int \{ (H\psi)^* m \mathbf{v} \psi - \psi^* m \mathbf{v} H \psi \} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \{ (H\psi)^* m \mathbf{v} \psi - \psi^* H m \mathbf{v} \psi \} + \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [H, m \mathbf{v}] \psi \end{aligned} \quad (9.156)$$

Usando le regole di commutazione (9.18) per il vettore \mathbf{v} , il secondo termine della (9.156) si riduce a

$$\frac{e}{2c} \int \psi^* [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}] \psi$$

che è l'usuale forza di Lorentz. Questo termine è nullo nel caso di una stringa magnetica. Il primo termine nella (9.156) è usualmente trascurato perchè se l'operatore H è autoaggiunto si annulla. Nel nostro caso il problema ha una singolarità nell'origine quindi valutiamo questo contributo isolando l'origine con un piccolo cerchio di raggio r , alla fine del calcolo faremo il limite $r \rightarrow 0$. Il dominio di integrazione è limitato da un cerchio di raggio r e da un cerchio di raggio R che manderemo all'infinito. Gli integrali verranno trasformati in integrali di superficie tramite il teorema di Gauss. Il contributo dal cerchio R è trascurato, è il caso che si verifica, ad esempio, con pacchetti d'onda localizzati¹².

Consideriamo una singola componente della velocità, ad esempio v_x , dobbiamo valutare

$$\frac{i}{\hbar} \int \{ (H\psi)^* m v_x \psi - \psi^* H m v_x \psi \} \quad (9.157)$$

L'Hamiltoniana, usando $\nabla \mathbf{A} = 0$, ha la forma

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e\hbar}{imc} \mathbf{A} \nabla + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2$$

Il termine quadratico in \mathbf{A} non dà alcun contributo alla (9.157). Il termine lineare si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{e}{mc} \int d^2x [(\nabla \psi^*) \mathbf{A} m v_x \psi + \psi^* \mathbf{A} \nabla m v_x \psi] &= \frac{e}{mc} \int d^2x \nabla (\psi^* \mathbf{A} m v_x \psi) = \\ &= -\frac{e}{mc} \int r d\theta \frac{\partial}{\partial r} (\psi^* A_r m v_x \psi) = 0 \end{aligned}$$

L'integrale si annulla perchè $A_r = 0$. Passiamo ora al termine in ∇^2 .

$$\begin{aligned} -\frac{i\hbar}{2m} \int d^2x \{ \nabla^2 \psi^* m v_x \psi - \psi^* \nabla^2 m v_x \psi \} &= \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \int d^2x \nabla \{ (\nabla \psi^*) m v_x \psi - \psi^* \nabla (m v_x \psi) \} \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \int r d\theta \left\{ \psi^* \frac{\partial}{\partial r} (m v_x \psi) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi^* \right) m v_x \psi \right\} \end{aligned} \quad (9.158)$$

Dovremo effettuare il limite $r \rightarrow 0$ dell'espressione precedente. Nel caso della soluzione di Aharonov-Bohm, avendosi $\psi(0) = 0$, i contributi finiti devono sorgere da singolarità nelle

¹² Per il segno nelle espressioni seguenti ricordiamo che la normale esterna alla superficie di raggio r è diretta in senso contrario a \mathbf{r} .

derivate. Scriviamo l'espressione per gli operatori $m\mathbf{v}$ nel caso della stringa magnetica

$$mv_x = p_x - \frac{e}{c}A_x = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{e\hbar}{c} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{y}{r^2} \right] = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha \frac{y}{r^2} \right] \equiv \frac{\hbar}{i} D_x \quad (9.159a)$$

$$mv_y = p_y - \frac{e}{c}A_y = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{e\hbar}{c} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{x}{r^2} \right] = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} + i\alpha \frac{x}{r^2} \right] \equiv \frac{\hbar}{i} D_y \quad (9.159b)$$

Consideriamo per semplicità il caso $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Dallo sviluppo in serie delle funzioni di Bessel

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} (1 + \mathcal{O}(z)) \quad (9.160)$$

segue che i termini principali (con derivata divergente) per ψ nello sviluppo (9.151) provengono dai contributi ψ_2 e ψ_3 :

$$\psi_2 \sim e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} J_{1-\alpha} e^{-i\theta} \rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2}kr\right)^{1-\alpha} \frac{e^{-i\theta}}{\Gamma(2-\alpha)} \equiv C_2 r^{-\alpha} (x - iy) \quad (9.161a)$$

$$\psi_3 \sim e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} J_\alpha \rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \left(\frac{1}{2}kr\right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \equiv C_3 r^\alpha \quad (9.161b)$$

Le derivate si calcolano facilmente:

$$\begin{aligned} D_x \psi &= C_2 (1-\alpha) r^{-\alpha} + C_3 \alpha r^{\alpha-2} e^{-i\theta} \\ D_y \psi &= i \left[-C_2 (1-\alpha) r^{-\alpha} + C_3 \alpha r^{\alpha-2} e^{-i\theta} \right] \end{aligned}$$

Quindi, per piccoli r :

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial r} D_x \psi = \left[C_2^* r^{1-\alpha} e^{i\theta} + C_3^* r^\alpha \right] \frac{\partial}{\partial r} \left[C_2 (1-\alpha) r^{-\alpha} + C_3 \alpha r^{\alpha-2} e^{-i\theta} \right] \quad (9.162a)$$

$$\rightarrow \frac{\alpha(a-\alpha)}{r} [-C_2 C_3^* - C_2^* C_3] = -2 \frac{\alpha(a-\alpha)}{r} \text{Re}(C_2 C_3^*) \quad (9.162b)$$

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial r} D_y \psi = \left[C_2^* r^{1-\alpha} e^{i\theta} + C_3^* r^\alpha \right] \frac{\partial}{\partial r} i \left[-C_2 (1-\alpha) r^{-\alpha} + C_3 \alpha r^{\alpha-2} e^{-i\theta} \right] \quad (9.162c)$$

$$\rightarrow i \frac{\alpha(a-\alpha)}{r} [C_2 C_3^* - C_2^* C_3] = -2 \frac{\alpha(a-\alpha)}{r} \text{Im}(C_2 C_3^*) \quad (9.162d)$$

si verifica facilmente che il termine $-\partial_r \psi^* D_i \psi$ dà lo stesso contributo. Sostituendo nella (9.158), effettuando il limite $r \rightarrow 0$ e l'integrale in θ :

$$f_x = -\frac{\hbar^2}{2m} 2\pi [-4\alpha(a-\alpha) \text{Re}(C_2 C_3^*)] \quad f_y = -\frac{\hbar^2}{2m} 2\pi [-4\alpha(a-\alpha) \text{Im}(C_2 C_3^*)]$$

Dalle (9.161) segue

$$C_2 C_3^* = e^{-i\pi/2} e^{i\pi\alpha} \frac{k}{2} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} = (\sin(\pi\alpha) - i \cos(\alpha)) \frac{k}{2} \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}$$

Da cui

$$f_x = \frac{2\hbar^2 k}{m} \sin^2(\pi\alpha) \quad f_y = -\frac{2\hbar^2 k}{m} \sin(\pi\alpha) \cos(\pi\alpha) \quad (9.163)$$

Vediamo quindi che nel calcolo quantistico la forza viene fornita da un termine di superficie, che si aggiunge all'espressione classica del teorema di Eherenfest.

La forza lungo l'asse x ha un'interpretazione semplice. Una particella che diffonde ad angolo θ ha un impulso $p_x = \hbar k \cos \theta$. L'impulso iniziale, nella configurazione usata, è $p_x = -\hbar k$, quindi la variazione di impulso è

$$\Delta p_x = \hbar k (1 + \cos \theta) = \hbar k 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Se Φ è il flusso iniziale, il numero di diffusioni al secondo ad angolo θ è $\Phi d\sigma/d\theta$ quindi

$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \Phi \int d\theta \frac{d\sigma}{d\theta} \Delta p_x$$

Il flusso corrispondente ad un'onda piana è $\hbar k/m$ quindi

$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \frac{\hbar^2 k^2}{m} \int d\theta 2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{2\pi k} \frac{1}{\cos^2 \theta/2} = \frac{2\hbar^2 k}{m} \sin^2(\pi\alpha)$$

che coincide col risultato precedente. Per p_y non si può fare lo stesso ragionamento perchè si ha una grossa variazione di fase della funzione d'onda lungo l'asse y nella regione $\theta \sim \pi$ in cui l'espressione asintotica (9.154) non vale.

9.D Precessione di Thomas.

Una esposizione generale e dettagliata della precessione di Thomas si può trovare, ad esempio in [Landau4] (par. 41), qui ci limiteremo ad una trattazione semplificata valida per $\mathbf{v} \rightarrow 0$.

Il problema è scrivere un'equazione come la (9.109) per un caso generico, in cui la particella si muove ed eventualmente sono presenti campi sia elettrici che magnetici.

Il primo punto da chiarire è che lo spin, quindi la direzione $\boldsymbol{\zeta}$, è definito *nel sistema di riferimento a riposo* della particella. In un sistema in cui la particella si muove il vettore spaziale $\boldsymbol{\zeta}$ sarà ottenuto tramite una trasformazione di Lorentz. Chiamiamo a^μ un quadri-vettore che nel sistema di riferimento a riposo si riduce ad un vettore puramente spaziale ($a^0 = 0, \mathbf{a} = \boldsymbol{\zeta}$). Ricordando la forma delle trasformazioni di Lorentz è facile scrivere a^μ “nel laboratorio” cioè in un sistema in cui la particella ha impulso \mathbf{p} , con l'usuale terminologia per i parametri delle trasformazioni di Lorentz:

$$a^0 = \beta \gamma \zeta_{\parallel} = \frac{|\mathbf{p}|}{mc} \zeta_{\parallel} \quad \mathbf{a}_{\perp} = \boldsymbol{\zeta}_{\perp} \quad \mathbf{a}_{\parallel} = \gamma \boldsymbol{\zeta}_{\parallel} = \frac{E}{mc^2} \boldsymbol{\zeta}_{\parallel} \quad (9.164)$$

dove a_{\parallel} e a_{\perp} sono le componenti parallele e perpendicolari alla direzione del moto. Nel seguito porremo $\hbar = c = 1$ per non appesantire la notazione. Le (9.164) possono essere riscritte nella forma

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\zeta} + \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{p})}{m(E + mc^2)} \quad a^0 = c \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}}{E} = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\zeta}}{mc} \quad (9.165)$$

Nell'ultima uguaglianza si è sfruttata l'espressione esplicita di \mathbf{a} e la relazione fra E e \mathbf{p} .

Il quadri-vettore a^μ soddisferà un'equazione covariante del tipo

$$\frac{da^\mu}{d\tau} = X^\mu$$

ed il quadri-vettore X^μ sarà lineare nei campi elettromagnetici e lineare in a^μ , come la (9.109). τ indica il tempo proprio.

A noi qui interessa la teoria a meno di fattori v^2/c^2 , ci limiteremo cioè ai termini lineari nelle velocità v . In questa approssimazione al posto del tempo proprio possiamo considerare il tempo t e le relazioni (9.164) si semplificano:

$$a^0 = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\zeta}}{mc} \quad \mathbf{a} \simeq \boldsymbol{\zeta} + \frac{\mathbf{p}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{p})}{2m^2 c^2} \quad (9.166)$$

Nella (9.166) abbiamo tenuto l'ordine v^2 per \mathbf{a} e questo è il punto delicato di tutto il calcolo: noi vogliamo scrivere le equazioni del moto al primo ordine in v , ma le equazioni del moto in campo elettromagnetico:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (9.167)$$

contengono un termine, quello nel campo elettrico, dell'ordine 0 in v . Quindi derivando una quantità di ordine v^2 si possono ottenere dei termini del tipo $v \cdot \mathbf{E}$ che sono lineari in v .

Torniamo all'equazione per a^μ . Il vettore \mathbf{a} è un vettore assiale, la forma più generale per la sua derivata è

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = C_0 \mathbf{a} \wedge \mathbf{B} + C_1 \mathbf{E}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) + C_2 \mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E}) + C_3 \mathbf{a}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \quad (9.168)$$

Nella formulazione completa i fattori C_i sono delle funzioni di v^2 ma per l'ordine a cui siamo interessati possiamo considerarli costanti. In particolare per $v \rightarrow 0$ si deve riottenere la (9.109), quindi $C_0 = ge/2mc$. Sempre restando al primo ordine in \mathbf{v} in tutti i termini a destra nella (9.168) possiamo sostituire \mathbf{a} con $\boldsymbol{\zeta}$.

Aggiungendo e sottraendo un termine del tipo $\mathbf{v}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{E})$ la (9.168) si può riscrivere nella forma più conveniente

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = g \frac{e}{2mc} \boldsymbol{\zeta} \wedge \mathbf{B} + A_1 \boldsymbol{\zeta} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{v}) + A_2 \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E}) + A_3 \mathbf{a}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \quad (9.169)$$

Effettuiamo ora una trasformazione di Lorentz con una piccola velocità \mathbf{V}_0 . Poichè $d\mathbf{a}/dt$ è la componente spaziale di un quadrivettore la sua variazione deve essere

$$\delta\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right) = \frac{\mathbf{V}_0}{c} \cdot \frac{da^0}{dt} = \frac{1}{mc^2} \mathbf{V}_0 \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \boldsymbol{\zeta} \right] + \mathcal{O}\left(\frac{V_0 \cdot \mathbf{p}}{c^2}\right) = \frac{e}{mc^2} \mathbf{V}_0(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\zeta}) + \mathcal{O}\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \quad (9.170)$$

Per trasformazioni di Lorentz a piccola velocità:

$$\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} - \mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{V}_0}{c} \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} + \mathbf{B} \wedge \frac{\mathbf{V}_0}{c} \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{V}_0$$

Sostituendo nel secondo membro della (9.169) il termine di variazione lineare nelle velocità è:

$$-g \frac{e}{2mc} \boldsymbol{\zeta} \wedge (\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{V}_0}{c}) + A_1 \boldsymbol{\zeta} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{V}_0) + A_2 \mathbf{V}_0(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E}) + A_3 \boldsymbol{\zeta}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{V}_0) \quad (9.171)$$

Confrontando la (9.170) con la (9.171) si ottiene:

$$A_1 = g \frac{e}{2mc^2} \quad A_2 = \frac{e}{mc^2} \quad A_3 = 0 \quad (9.172)$$

cioè l'invarianza di Lorentz fissa completamente i coefficienti.

Sostituendo l'espressione esplicita di \mathbf{a} , eq.(9.166), nella (9.169) si ha allora, sempre trascurando gli ordini v^2 ed usando le equazioni del moto:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} + \frac{e}{2mc^2} [\mathbf{E}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E})] = g \frac{e}{2mc} \boldsymbol{\zeta} \wedge \mathbf{B} + g \frac{e}{2mc^2} \boldsymbol{\zeta} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{v}) + \frac{e}{mc^2} \mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E})$$

Usando l'identità: $\mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\boldsymbol{\zeta} \cdot \mathbf{v}) = \boldsymbol{\zeta} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{E}) = -\boldsymbol{\zeta} \wedge (\mathbf{E} \wedge \mathbf{v})$ si può riscrivere la derivata nella forma:

$$\frac{d\boldsymbol{\zeta}}{dt} = g \frac{e}{2mc} \boldsymbol{\zeta} \wedge \mathbf{B} + \frac{e}{2mc} (g-1) \boldsymbol{\zeta} \wedge (\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}) \quad (9.173)$$

Quindi gli accoppiamenti col campo magnetico e col campo elettrico sono rispettivamente

$$g \frac{e}{2mc} \mathbf{B} \quad \frac{e}{2mc} (g-1) (\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}) \quad (9.174)$$

L'aspettativa ingenua era che un momento magnetico $g \frac{e}{2mc}$ si accoppiasse con il trasformato di Lorentz del campo \mathbf{E} nel sistema a riposo dell'elettrone, cioè $\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}$ invece l'accoppiamento è

$$H_I = -g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} - \frac{e}{2mc} (g-1) \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}) \quad (9.175)$$

Per $g = 2$, siccome $2 - 1 = 1 = 2/2$ si usa impropriamente dire che la precessione di Thomas introduce un fattore $1/2$, in realtà provoca una sottrazione $g \rightarrow g - 1$.

Come controllo scriviamo le equazioni di Heisenberg per lo spin. Se $H_I = -\mathbf{s} \cdot \mathbf{F}$ dalle regole di commutazione del momento angolare segue

$$[s_i, H_I] = -[s_i, s_j F_j] = -i\hbar \varepsilon_{ijk} s_k F_j = i\hbar (\mathbf{s} \wedge \mathbf{F})_i \quad (9.176)$$

Sia ora l'Hamiltoniana del sistema nella forma

$$H = H_0 + H_I$$

dove H_0 è la parte che non dipende dallo spin, H_I l'Hamiltoniana (9.175), dove ora \mathbf{s} è un operatore. utilizzando la (9.176) si ha

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{s}] = \frac{i}{\hbar} [H_I, \mathbf{s}] = \mathbf{s} \wedge \left[g \frac{e}{2mc} \mathbf{B} + \frac{e}{2mc} (g-1) (\mathbf{E} \wedge \frac{\mathbf{v}}{c}) \right] \quad (9.177)$$

La media su uno stato semiclassico fornisce $\langle \mathbf{s} \rangle = S\boldsymbol{\zeta}$ e si riottiene la (9.175).

Nota. Il lettore particolarmente attento avrà osservato che nello scrivere l'equazione (9.168) abbiamo affermato che \mathbf{a} è un vettore assiale. Normalmente in relatività i vettori assiali vengono introdotti attraverso un tensore a due indici, come nel caso del campo magnetico: il tensore di partenza è $F_{\mu\nu}$ che è decomposto in una parte elettrica $F^{0i} = \mathbf{E}_i$ ed una magnetica F_{jk} con $B_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F^{jk}$. Il fatto è che per trasformazioni di Lorentz il vettore \mathbf{B} non si trasforma affatto come a^μ nelle (9.164). La variabile di spin in effetti è una parte del momento angolare, la parte angolare del momento orbitale si scrive in relatività nella forma

$$x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$$

e anche lo spin deve perciò essere trattato come un tensore a due indici antisimmetrico, cioè deve avere le stesse proprietà di trasformazione del momento angolare orbitale, o di $F^{\mu\nu}$. Chiamiamo $S^{\mu\nu}$ questo tensore e rappresentiamolo come per il campo elettromagnetico con due vettori, uno polare, tipo il campo elettrico e uno assiale, tipo il campo magnetico:

$$S^{\mu\nu} = (\mathbf{P}, \mathbf{A})$$

lo spin S è definito come il vettore \mathbf{A} nel sistema di riferimento a riposo, in questo sistema $\varepsilon_{ijk} S_{jk} = (S)_i$ è il generatore delle rotazioni spaziali, esattamente come $(\mathbf{x} \wedge \mathbf{p})_i$ è il generatore delle rotazioni orbitali. Il vettore a^μ usato nel testo è

$$a_\mu = \frac{1}{2mc^2 |S|} \varepsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} S^{\alpha\beta} p^\gamma \quad (9.178)$$

$|S|$ è il valore del modulo dello spin nel sistema di quiete, es. $\hbar/2$ per un elettrone. Nel sistema di riferimento a riposo $p^\mu = (mc^2, \mathbf{0})$ ed il vettore a^μ è proprio il vettore $\boldsymbol{\zeta}$ usato nel testo. Il vantaggio dell'uso di a^μ rispetto a $S^{\mu\nu}$ risiede appunto nelle sue proprietà di trasformazione più semplici. Lasciamo al lettore la facile verifica che a^μ è un quadrivettore unitario di genere spazio, $a_\mu a^\mu = -1$, e che $a_\mu p^\mu = 0$.

9.E Correzioni relativistiche in campo esterno.

Nel testo abbiamo visto che al primo ordine in v/c l'Hamiltoniana per un elettrone in campo esterno ha la forma

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi - g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} \quad (9.179)$$

Abbiamo anche scritto la prima correzione ordine $1/c^2$ nella forma

$$H_{LS} = -(g-1) \frac{e}{2m^2 c^2} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{p}) \quad (9.180)$$

Occorre in realtà fare una precisazione, gli operatori $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ e \mathbf{p} in generale non commutano fra loro quindi in che ordine scriverli? La prescrizione che useremo è la cosiddetta *prescrizione di Weyl*: per passare da una espressione classica ad una quantistica, scritta cioè con operatori, effettuiamo la sostituzione

$$A_{cl} \rightarrow \frac{1}{2} (A + A^\dagger) \quad (9.181)$$

Per il prodotto di due operatori autoaggiunti questo equivale a simmetrizzare l'espressione. Oltre alla sua semplicità una parziale giustificazione della prescrizione proviene dal fatto che nell'interazione fondamentale elettromagnetica in effetti l'interazione compare in forma simmetrizzata

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{p}$$

Naturalmente la correttezza della prescrizione, nei casi che useremo, è assicurata dal fatto che espandendo in serie di v/c l'espressione corretta relativistica si ottengono in effetti i risultati che presenteremo nel seguito. Con la prescrizione di Weyl:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{ijk} E_j p_k)_{class} &\rightarrow \frac{1}{2} [\varepsilon_{ijk} E_j p_k + \varepsilon_{ijk} p_k E_j] = \\ &\varepsilon_{ijk} E_j p_k + \frac{\hbar}{2i} \varepsilon_{ijk} \partial_k E_j = (\mathbf{E} \wedge \mathbf{p})_i + i \frac{\hbar}{2} (\nabla \wedge \mathbf{E})_i \end{aligned}$$

come si verifica immediatamente usando la rappresentazione di Schrödinger per gli impulsi. Per campi statici, come in un atomo, $\nabla \wedge \mathbf{E} = 0$, e quindi, ad esempio, non ci sono problemi di ordinamento per l'interazione LS . In generale, ponendo per semplicità $g = 2$

$$H_{LS} = -\frac{e}{2mc^2} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{p}) - i \frac{e\hbar}{4mc^2} \mathbf{s} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) \quad (9.182)$$

Energia cinetica.

In meccanica relativistica l'energia cinetica di una particella è

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \sim \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{1}{8} \frac{\mathbf{p}^4}{m^3 c^2} \quad (9.183)$$

il secondo termine nella (9.183) va aggiunto quindi alla Hamiltoniana come correzione di ordine v^2/c^2 . In questo calcolo i termini $e\mathbf{A}/c$ possono essere trascurati perchè hanno potenze aggiuntive di $1/c$ a denominatore.

Nel calcolo esplicito delle correzioni v^2/c^2 a partire dall'equazione di Dirac compare un altro termine, detto *termine di Darwin* della forma

$$H_D = -\frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \nabla \cdot \mathbf{E}$$

Questo termine è completamente localizzato nella sorgente del campo ed in particolare per un campo coulombiano ha la forma

$$-\frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} 4\pi Z |e| \delta^{(3)}(\mathbf{r}) = +\frac{Ze^2 \hbar^2 \pi}{2m^2 c^2} \delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

Il termine H_D non ha una semplice interpretazione semiclassica. Intuitivamente si può dire che per effetti relativistici la funzione d'onda elettronica ha delle fluttuazioni ξ per lunghezze pari al raggio Compton dell'elettrone $r_e = \hbar/mc$:

$$\langle \xi_i \rangle = 0 \quad \langle \xi_i \xi_j \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij} r_e^2$$

in questo modo l'energia elettrostatica in un potenziale Φ ha un contributo aggiuntivo dovuto alle fluttuazioni:

$$\langle eV(x + \xi) \rangle \simeq eV(x) + \frac{1}{2} \langle \xi_i \xi_j \partial_i \partial_j V \rangle = e \frac{1}{6} r_e^2 \langle \Delta V \rangle = \frac{1}{6} Ze^2 r_e^2 \delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

A meno di un fattore numerico si ha il termine di Darwin. Comunque il ragionamento è essenzialmente un ordine di grandezza, se esiste un termine locale il fattore davanti deve

essere per forza $e^2 r_e^2$ per ragioni dimensionali. Nella derivazione dall'equazione di Dirac questo termine è intimamente collegato con lo spin, a riprova di ciò questo termine è assente, a quest'ordine, nell'espansione in v/c per un campo a spin zero.

Noi prenderemo questo termine per buono e quindi l'Hamiltoniana completa in campo esterno è della forma:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi - g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3 c^2} - \frac{e}{2mc^2} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{p}) - i \frac{e\hbar}{4mc^2} \mathbf{s} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{E}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \quad (9.184)$$

ed in particolare per un campo coulombiano

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\Phi - g \frac{e}{2mc} \mathbf{s} \cdot \mathbf{B} - \frac{\mathbf{p}^4}{8m^3 c^2} + \frac{e^2}{2m^2 c^2} \frac{Z}{r^3} \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} + \frac{Ze^2 \hbar^2 \pi}{2m^2 c^2} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \quad (9.185)$$

9.F Interazioni fra due particelle.

In un atomo reale il nucleo non ha massa infinita quindi ci aspettiamo che l'Hamiltoniana precedente abbia delle correzioni m_e/M , dove m_e è la massa elettronica, M la massa nucleare. Uno degli aspetti di questa questione è l'interazione iperfina, discussa nel testo. Qui vogliamo accennare ai termini aggiuntivi alla (9.185) che non dipendono dallo spin. Ci limiteremo al caso del problema dei due corpi, un esempio di problema a più corpi sarà visto nello studio dello spettro dell'elio.

Il parametro m_e/M è un parametro piccolo, dell'ordine di 10^{-3} , quindi ci limiteremo a studiarne solo gli effetti al primo ordine.

Nel limite non relativistico il problema dei due corpi ha una Hamiltoniana della forma

$$H = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} + \frac{\mathbf{p}_N^2}{2M} - \frac{Ze^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (9.186)$$

Già sappiamo che passando a coordinate relative il problema si riduce al problema di un singolo corpo con massa ridotta $\mu = (m_e M)/(m_e + M)$:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{Ze^2}{r}$$

Quindi nel problema a due corpi la correzione di massa non relativistica è “banale” nel senso che basta sostituire la massa ridotta μ alla massa dell'elettrone in tutte le espressioni. In particolare per un sistema idrogenoide con nucleo infinitamente pesante i livelli sono espressi nella forma

$$E_n = -\frac{1}{2n^2} R_\infty \quad R_\infty = \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \quad (9.187)$$

Per ottenere i livelli relativi ad un nucleo di massa M basta considerare la costante di Rydberg modificata

$$R_A = \frac{M}{m_e + M} R_\infty$$

Come si vede lo spettro fra due isotopi, esempio idrogeno e deuterio, è praticamente lo stesso a meno di un cambiamento di scala. Nondimeno questa differenza è molto utile, ad esempio se si vuole fare una separazione isotopica tramite tecniche laser, o semplicemente si voglia stabilire la concentrazione di un determinato isotopo in un corpo: le righe di assorbimento per i vari isotopi hanno una separazione in frequenza ben al di sopra delle risoluzioni tipiche delle misure spettroscopiche.

Consideriamo ora i termini di struttura fine. Il termine di Darwin per il nucleo è di ordine $1/M^2$ e lo possiamo trascurare. L'accoppiamento LS per l'elettrone va scritto come

$$\frac{e^2}{2m_e^2 c^2} \frac{Z}{r^3} \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s} \quad (9.188)$$

questo termine descrive l'accoppiamento dello spin elettronico col proprio momento angolare orbitale. L'analogo termine per il nucleo è di ordine $1/M^2$, quindi trascurabile. C'è poi l'accoppiamento dello spin e del momento angolare elettronico con lo spin nucleare, è il termine di struttura iperfine già considerato:

$$H_I = -\frac{e}{mc} \left(\frac{1}{r^3} \boldsymbol{\mu}_N \cdot \boldsymbol{\ell} \right) \quad (9.189)$$

$$- \frac{e}{mc} \left[-(\boldsymbol{\mu}_N \cdot \mathbf{s} - 3(\boldsymbol{\mu}_N \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}) \frac{1}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\mu}_N \mathbf{s} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right]$$

Il primo termine della (9.189) descrive l'interazione fra il momento magnetico del nucleo ed il momento orbitale dell'elettrone, il secondo l'interazione fra i due momenti magnetici. Se il nucleo ha massa finita abbiamo anche un termine di interazione fra il campo magnetico creato dall'elettrone ed il moto orbitale del nucleo. Nel centro di massa il momento orbitale è sempre $\boldsymbol{\ell}$ quindi questo termine aggiuntivo è, indicando con $e_N = Z|e|$ la carica del nucleo:

$$- \frac{e_N}{Mc} \left(\frac{1}{r^3} \boldsymbol{\mu}_e \cdot \boldsymbol{\ell} \right)$$

Ora $\boldsymbol{\mu}_e = ge/2m_e c = e/m_e c$ quindi questo termine si scrive

$$- \frac{e_N e}{m_e M c^2} \left(\frac{1}{r^3} \mathbf{s}_e \cdot \boldsymbol{\ell} \right) \quad (9.190)$$

Questo termine si aggiunge al termine di struttura fine e notando che

$$\frac{1}{2m_e^2} + \frac{1}{m_e M} \simeq \frac{1}{m^2} + \mathcal{O}(m_e^2/M^2)$$

è completamente riassorbito nella massa ridotta. In conclusione anche nei termini di struttura fine scrivendo m al posto di m_e si riassorbono tutte le correzioni di ordine m_e/M .

C'è ancora un punto sottile da considerare: le correzioni al potenziale coulombiano. Se il nucleo si muove la forza fra nucleo ed elettrone ha un ritardo, classicamente questo ritardo va trattato scrivendo i potenziali di Lienard-Wiechert ritardati. Fino all'ordine v^2/c^2 è possibile trascurare i fenomeni di irraggiamento, quindi scrivere una lagrangiana e derivare una Hamiltoniana tenendo conto delle sole variabili dinamiche delle particelle. Questo è un problema classico di elettromagnetismo che non riportiamo qui, il lettore interessato può trovare una dimostrazione in [Landau2] (par. 65 ed esercizi). Il risultato è che l'Hamiltoniana nel centro di massa del sistema è scrivibile nella forma

$$H = \frac{p^2}{2} \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{M} \right) - \frac{Ze^2}{r} - \frac{p^4}{8c^2} \left(\frac{1}{m_e^3} + \frac{1}{M^3} \right) - \frac{Ze^2}{2mMc^2 r} (p^2 + (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})^2) \quad (9.191)$$

Il secondo termine è semplicemente lo sviluppo dell'energia relativistica per una particella libera, che già conosciamo. Usando la massa ridotta e trascurando i termini m_e^2/M^2 può essere riscritto nella forma

$$- \frac{p^4}{8m^3 c^2} + \frac{3p^4}{8m^2 M c^2} \quad (9.192)$$

L'ultimo termine è quello che esprime il ritardo.

Per scriverlo in forma quantistica usiamo ancora la procedura di Weyl. Possiamo considerare l'operatore

$$X = \frac{1}{r} (\mathbf{p}^2 + \hat{r}_i \hat{r}_j p_i p_j) \equiv \frac{1}{r} [\mathbf{p}^2 + \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}]$$

Scriviamo cioè tutti gli operatori impulso a destra. Si può verificare con un breve calcolo che $X = X^\dagger$ e quindi questo ordinamento dà un operatore hermitiano.

In conclusione l'Hamiltoniana effettiva del problema a due corpi, coulombiano, è

$$H = H_0 + H_{FS} + H_M + H_{HFS} \quad (9.193)$$

$$H_0 = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + e\Phi$$

$$H_{FS} = -\frac{\mathbf{p}^4}{8m^3c^2} + \frac{e^2}{2m^2c^2} \frac{Z}{r^3} \boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{s} + \frac{Ze^2\hbar^2\pi}{2m^2c^2} \delta^{(3)}(\mathbf{r})$$

$$H_M = \frac{1}{Mc^2} \left[\frac{3\mathbf{p}^4}{8m^2} - \frac{Ze^2}{2mr} (\mathbf{p}^2 + \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}) - \frac{Ze^2\hbar^2\pi}{m} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right]$$

$$H_{HFS} = -\frac{e}{mc} \left(\frac{1}{r^3} \boldsymbol{\mu}_N \cdot \boldsymbol{\ell} \right) - \frac{e}{mc} \left[-(\boldsymbol{\mu}_N \cdot \mathbf{s} - 3(\boldsymbol{\mu}_N \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s}) \frac{1}{r^3} + \frac{8\pi}{3} \boldsymbol{\mu}_N \mathbf{s} \delta^{(3)}(\mathbf{r}) \right]$$

Questa Hamiltoniana prende il nome di *Hamiltoniana di Breit*. Nello scrivere la (9.193) abbiamo riscritto il termine di Darwin in termini della massa ridotta.

Un punto rilevante è che l'Hamiltoniana H_M non dipende dallo spin quindi non influenza la struttura fine dei livelli.

Esercizio 2. Dimostrare che $\mathbf{p}^2 + \hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p})\mathbf{p}$ è un operatore hermitiano. Per $\mathbf{r} \neq 0$ basta effettuare le derivate opportune. Per dimostrare che non ci sono termini del tipo $\delta(\mathbf{r})$ si può notare che questi possono comparire solo quando due derivate agiscono sui fattori $1/r$. Si applichi il teorema di Gauss per dimostrare che le funzioni $\delta(\mathbf{r})$ che provengono dai due termini si cancellano fra loro.

Bibliografia

- [AB59] Y. Aharonov, D. Bohm: *Phys. Rev.* **115**, 485, (1959).
- [AB61] Y. Aharonov, D. Bohm: *Phys. Rev.* **123**, 1511, (1961); *Phys. Rev.* **125**, 2192, (1962); *Phys. Rev.* **130**, 1625, (1963).
- [Ber1] M.V. Berry: *Eur. J. Phys.* **1**, 240, (1980).
- [DNF] B. Doubrovine, S. Novikov, R. Fomenko: *Geometrie Contemporaine, methodes et applications*, 3 vol., ed. Mir, Mosca.
- [Alv] M. Alvarez: *Phys. Rev. A* **54**, 1128, (1996).
- [Fey3] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics*, Vol.3, Addison-Wesley Pub. Company.
- [JR83] R. Jackiw, A.N. Redlich: *Phys. Rev. Lett.* **50**, 555, (1983).
- [Fla] H. Flanders: *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Dover Publications, 1989.
- [Landau1] L.D. Landau, E.M. Lifšits: *Meccanica*, Corso di Fisica Teorica, Vol.1, Ed. Riuniti.
- [Landau2] L.D. Landau, E.M. Lifšits: *Teoria dei Campi*, Corso di Fisica Teorica, Vol.2, Ed. Riuniti.
- [Landau3] L.D. Landau, E.M. Lifšits: *Meccanica Quantistica*, Corso di Fisica Teorica, Vol.3, Ed. Riuniti.
- [Landau4] L.D. Landau, E.M. Lifšits: *Teoria Quantistica Relativistica*, Corso di Fisica Teorica, Vol.4, Ed. Riuniti.
- [NS] C. Nash, S. Sen: *Topology and Geometry for Physicists.*, Academic Press, 1983.
- [OIP] S. Olariu, I. Iovitzu Popescu: *Rev. Mod. Phys.* **57**, 339, (1985).
- [PT] : M. Peshkin, A. Tonomura: *The Aharonov-Bohm Effect*, Lectures Notes in Physics, Springer-Verlag 1989.
- [To1] A. Tonomura, S. Yano, N. Osakabe, T. Matsuda, H. Yamada, T. Kawasaki, J. Endo: *Proc. 2nd Int. Simp. Foundations of Quantum Mechanics*, Tokyo, 97, (1986); *Phys. Rev. Lett.* **56**, 792, (1986).
- [To2] A. Tonomura: *Int. Journ. of Mod. Physics A* **15**, 3427, (2000).
- [WY75] T.T. Wu, C.N. Yang: *Phys. Rev. D* **12**, 3845, (1975).