

“ondulatoria” (8.60) della funzione d’onda la monodromia è proprio all’origine della quantizzazione di L , nell’interpretazione “corpuscolare” (8.62) questa periodicità è evidente solo se si somma su tutte le possibili traiettorie $\theta' \rightarrow \theta$, ognuna topologicamente non riconducibile all’altra. Questo tipo di considerazioni compaiono spesso quando, con tecniche mutuare dalla regola di Poisson, si riesce a dare una descrizione “duale” dei modelli.

Una piccola generalizzazione di questo modello sarà fornita nel complemento 8.B.

8.3 Effetto Aharonov-Bohm

Un effetto, sorprendente dal punto di vista classico, ma che rivela chiaramente la natura meccanico-quantistica dell’elettromagnetismo e la sua interazione con la materia, è il cosiddetto *effetto Aharonov-Bohm*, scoperto nel 1959 [AB59], trenta anni dopo la formulazione della meccanica quantistica. Nonostante che la sua correttezza fosse accettata da tempo, la sua conferma sperimentale definitiva è avvenuta molto più recentemente, nel 1998, grazie agli esperimenti fatti da Tonomura et. al. [To1],[To2].

Consideriamo la classica esperienza à la Young, l’interferenza di un fascio *elettronico* con una doppia fenditura, discussa nell’Introduzione. lo schema è riportato in figura 8.2. Ricordiamo che nel caso usuale, senza campo magnetico, la funzione d’onda ψ è approssimabile nella forma

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 \quad (8.64)$$

dove ψ_1 e ψ_2 sono le “onde” corrispondenti al passaggio nella parte superiore e inferiore della figura ³. La differenza di cammino ottico fra i due termini provoca, vedi cap.1, uno sfasamento relativo

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\ell \quad \Delta\ell = \frac{2xd}{L} \quad (8.65)$$

dando luogo alle note frange di interferenza nella misura di $|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$.

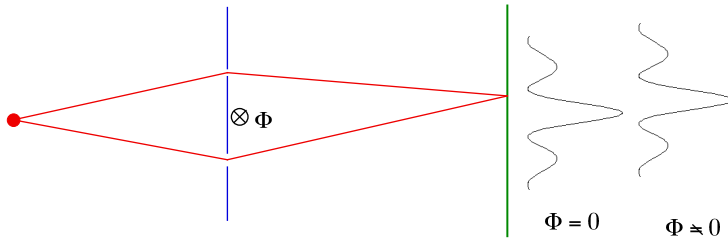


Figura 8.2: Interferenza senza flusso magnetico e con flusso magnetico.

Consideriamo ora l’identica situazione ma con l’aggiunta di un solenoide, infinitamente lungo per semplicità, dietro allo schermo in figura 8.2. Il solenoide può essere considerato impenetrabile al fascio elettronico. Classicamente il suo effetto dovrebbe essere totalmente

³Vedi anche l’appendice 8.C

nullo: il campo magnetico al di fuori del solenoide è nullo. Quantisticamente la situazione è completamente diversa. Al di fuori del solenoide è presente un campo $\mathbf{A} \neq 0$. Il termine ψ_1 nella (8.64) si riferisce alla propagazione (semiclassica) nella regione superiore della figura 8.2, in questa regione, che è *semplicemente connessa*, l'effetto del campo \mathbf{A} è semplicemente quello di aggiungere una fase alla funzione d'onda ψ_1 , cioè in presenza di \mathbf{A} :

$$\psi_1 \rightarrow \exp \left(i \frac{e}{\hbar c} \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right) \psi_1. \quad (8.66)$$

Ricordiamo che l'integrale nella (8.66) *non dipende* dal cammino, finchè restiamo nella zona che non circonda il solenoide.

Analogamente la funzione ψ_2 viene modificata da

$$\psi_2 \rightarrow \exp \left(i \frac{e}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} \right) \psi_2. \quad (8.67)$$

Vediamo allora che la *differenza di fase* fra i due termini nella (8.64) viene modificata per un fattore

$$\frac{e}{\hbar c} \int_1 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} - \frac{e}{\hbar c} \int_2 \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{e}{\hbar c} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \frac{e}{\hbar c} \Phi. \quad (8.68)$$

Corrispondentemente le differenze di fase (8.65) diventano:

$$\Delta\phi = \Delta\phi|_{\Phi=0} + \frac{e}{\hbar c} \Phi, \quad \text{spostamento:} \quad \delta x = \frac{e \lambda L \Phi}{4\pi c \hbar d}. \quad (8.69)$$

Si ha quindi uno *spostamento delle frange di interferenza*, modulato dal flusso Φ del campo magnetico nel solenoide. Notiamo che per

$$\frac{e}{\hbar c} \Phi = 2n\pi \quad (8.70)$$

l'effetto scompare.

Sottolineiamo che l'effetto di spostamento delle frange non solo mette in luce l'importanza del campo vettoriale \mathbf{A} , ma specifica che esso interviene solo nella forma *gauge invariante* (8.66) e *solo* nella forma di fase, infatti l'effetto scompare per valori della quantità $e\Phi/\hbar c$ multipli di 2π . Della differenza rispetto alla meccanica classica abbiamo già parlato, bisogna anche aggiungere che all'epoca dell'analisi di Aharonov e Bohm, che hanno proposto un esperimento simile a quello di figura 8.2, molti non erano convinti della necessità di introdurre i potenziali vettori nella descrizione della meccanica quantistica. I primi risultati sperimentali erano a favore dell'ipotesi di Aharonov e Bohm confermando la presenza di frange di interferenza che si spostavano al variare del flusso di campo magnetico, ma alcuni aspetti teorici e sperimentali lasciavano aperta qualche spiegazione alternativa. Tale diatriba è stata risolta in modo definitivo in una recente serie di esperimenti sorprendenti fatti al Laboratorio centrale di Hitachi, da Tonomura e dai suoi collaboratori.

La diatriba nasceva dai seguenti aspetti piuttosto delicati, sia sperimentali che teorici, dell'effetto A-B. Prima di tutto, in meccanica quantistica, l'elettrone è descritto da una funzione d'onda, ed è difficile escludere completamente che esso penetri anche nella regione dove è situato il solenoide, $\mathbf{B} \neq 0$. Un altro problema sperimentale è che un solenoide non è mai

ideale, non è mai infinitamente lungo, il campo magnetico non è mai completamente contenuto all'interno del solenoide. Inoltre, dal punto di vista teorico, ci sarebbe la possibilità di scegliere la gauge di modo che nelle equazioni appaiono soltanto il campo magnetico \mathbf{B} (o le sue derivate), e non più il potenziale vettoriale \mathbf{A} (gauge di Schwinger). Se tale scelta di gauge fosse legittima, non ci si dovrebbe aspettare nessun effetto A-B, se l'elettrone non passa mai nella regione con il campo magnetico (o se l'apparato sperimentale è costruito di modo che tale probabilità sia comunque trascurabile). Ogni effetto osservato sarebbe da attribuire alla non perfezione dell'apparato.

A quest'ultima obiezione teorica può essere risposta osservando che una gauge in cui il potenziale vettoriale viene eliminata in favore di \mathbf{B} è necessariamente singolare, e perciò non è una scelta accettabile.

Le prime obiezioni sono però più insidiose. L'idea brillante che ha permesso al gruppo di Tonomura di ovviare a questi problemi, con il suggerimento di C.N. Yang, è stato quello di ricoprire completamente un anello magnetico microscopico con uno strato superconduttore di Niobio, (Fig.8.3). Si veda la nota seguente su alcuni aspetti salienti della superconduttività e del fenomeno della quantizzazione del flusso magnetico.

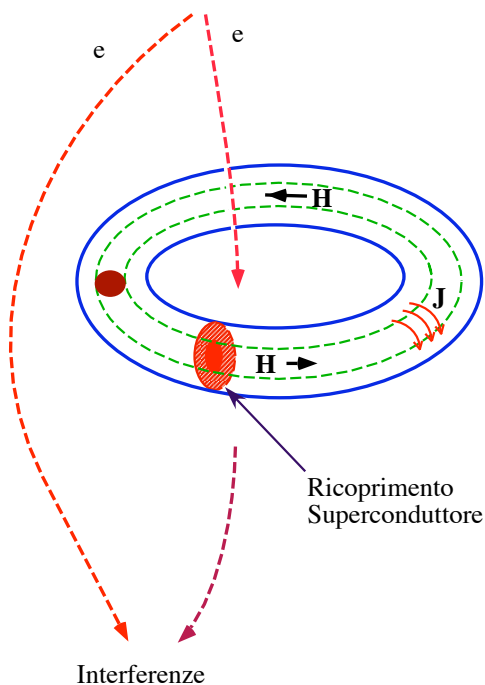


Figura 8.3: Lo schema dell'esperimento di Tonomura et.al. . (Il "toro di superconduttore" della Fig. 8.6 corrisponde ad una sezione (fetta) di questo doppio toro).

Facendo attraversare il fascio di elettroni parzialmente dentro e parzialmente fuori il foro e osservando la frange dell'interferenza, si osservano gli effetti à la Aharonov-Bohm. Ma

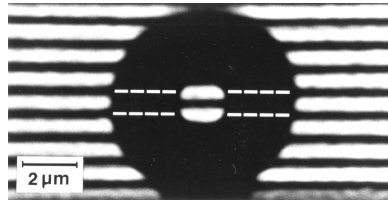


Figura 8.4: Verifica dell'effetto Aharonov-Bohm (Tonomura et. al. [To1], [To2]).

l'osservazione determinante è il fatto che lo spostamento di fase diventa o zero o π (Fig. 8.4), quando il ricoprimento superconduttore dell'anello diventa superconduttore (al di sotto della temperatura critica per Nb, $T_c = 9.2\text{K}$), mentre al di sopra della temperatura critica, $\Delta\phi$ prende un valore generico casuale, dipendente da come il campione è stato preparato.

Si osservi in particolare che

- (i) Il campo magnetico è contenuto all'interno dell'anello superconduttore e non può fuoriuscire (effetto Meissner). Forma un selenoide di forma anulare ideale, *i.e.*, senza le estremità.
- (ii) L'elettrone è schermato dal ricoprimento esterno dell'anello e non può penetrare all'interno.
- (iii) Il flusso magnetico all'interno del anello è quantizzato:

$$\Phi_n = \frac{2\pi c \hbar}{q} n = \frac{\pi c \hbar}{e} n; \quad q = 2e, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.71)$$

Sostituendo questo nella formula (8.69) si ha che lo spostamento di fase è dato da un multiplo di π , come è effettivamente osservato sperimentalmente. Si noti un fattore 2 determinante tra la carica della coppia di Cooper ($q = 2e$), responsabile del meccanismo della superconduttività e che compare nella (8.71) e quella dell'elettrone.

È da notare che questo esperimento rappresenta una doppia verifica, da un lato dell'effetto A-B (nei campioni con lo sfasamento π), dall'altro della quantizzazione di flusso magnetico.

8.3.1 Superconduttore

Riportiamo qui gli aspetti principali della superconduttività nei metalli a temperature estremamente basse, in un campo magnetico esterno. Gli elettroni in un metallo risentono di una interazione reciproca dovuta agli scambi di fononi (eccitazioni del reticolo cristallino) e possono formare stati legati, chiamate coppie di Cooper. A temperature estremamente basse (al di sotto di una temperatura critica, che dipende dalla sostanza) le coppie di Cooper - bosoni - condensano e sono descritte⁴ da una sorta di funzione d'onda macroscopica Ψ .

⁴I bosoni identici debolmente accoppiati tendono a occupare lo stesso stato quantistico. A temperatura al di sotto della temperatura critica, un numero macroscopico dei bosoni occupa lo stato fondamentale (condensazione di Bose-Einstein). Il sistema in tale stato è descritto dalla distribuzione dei numeri di occupazione $d(\mathbf{p})$ o dalla sua trasformata di Fourier, $\Psi(\mathbf{r})$. $|\Psi(\mathbf{r})|^2$ rappresenta allora realmente la densità, non la densità di probabilità, delle particelle.

Le equazioni di Maxwell e la corrente microscopica sono date dalle solite equazioni:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}; \quad (8.72)$$

$$\mathbf{j} = q \frac{1}{4m} \left[\Psi^* \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \Psi - \left\{ \left(\mathbf{p} - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right) \Psi \right\}^* \Psi \right], \quad (8.73)$$

Abbiamo chiamato $q = -2|e|$ la carica della coppia. m è la massa dell'elettrone, quindi $2m$ è la massa della coppia di Cooper. In generale possiamo scrivere la funzione d'onda Ψ nella forma

$$\Psi = \sqrt{\rho} e^{i\theta}, \quad \rho(\mathbf{r}) = \Psi^* \Psi \neq 0. \quad (8.74)$$

Lo stato superconduttore può essere caratterizzato da una densità costante di coppie, quindi $\rho = \text{cost.} \neq 0$. Questo stato è descritto come *condensazione* delle coppie di Cooper.

La corrente (8.73) si scrive quindi

$$\mathbf{j} = \frac{q\rho}{2m} \left(\hbar \nabla \theta - \frac{q}{c} \mathbf{A} \right). \quad (8.75)$$

L'equazione di continuità allora implica $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, *i.e.*,

$$\nabla^2 \theta = 0, \quad (8.76)$$

dove è stata assunta la gauge $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. All'interno del superconduttore la (8.76) implica

$$\theta = \text{const.} \quad (8.77)$$

Segue la relazione

$$\mathbf{j} = -\frac{q^2 \rho}{2m c} \mathbf{A}, \quad (8.78)$$

nota come equazione di London. Le equazioni di Maxwell per il campo $\mathbf{B} = \nabla \wedge \mathbf{A}$ danno:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = \frac{2\pi \rho q^2}{m c^2} \mathbf{A} \equiv \lambda^{-2} \mathbf{A}. \quad (8.79)$$

Se consideriamo ora la superficie di un superconduttore, schematizzata come il piano $z = 0$ (il metallo occupa la zona $z > 0$) la soluzione della (8.79) ha la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{-z/\lambda}, \quad \lambda = \left(\frac{2\pi \rho q^2}{m c^2} \right)^{-1/2}. \quad (8.80)$$

La (8.80) significa che il campo magnetico è fortemente depresso⁵ in un mezzo superconduttore: \mathbf{B} può penetrare nel corpo di superconduttore soltanto per uno spessore dell'ordine di λ , chiamato lunghezza di penetrazione di London. Con dei parametri appropriati per il piombo, per es., (assumendo che ognuno degli atomi dia un elettrone di conduzione), $\rho \sim 3 \cdot 10^{22} / \text{cm}^3$, si ha

$$\lambda \sim \sqrt{\frac{1}{8\pi} \frac{m c^2}{e^2} \frac{1}{10^{22}}} \sim \sqrt{\frac{1}{25} \frac{1}{3 \cdot 10^{-13}} \frac{1}{10^{22}}} \sim O(10^{-5}) \text{ cm}. \quad (8.81)$$

Questo fenomeno, per cui il campo magnetico viene espulso da una sostanza superconduttrice è noto come *effetto Meissner*.

⁵Nel gergo della fisica delle particelle, il fotone che media l'interazione elettromagnetica ha acquistato una massa effettiva tramite il meccanismo di Higgs.

Quantizzazione del flusso magnetico Accade una cosa molto interessante quando la materia superconduttrice ha la forma di un toro (la superficie è topologicamente una superficie toroidale).

Poiché z è una variabile angolare, la (8.76) ammette ora una soluzione non banale ⁶,

$$\theta(x, y, z) = cz, \quad c = \frac{2\pi n}{T}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (8.82)$$

dove z è la coordinata lungo il cerchio del toro, T è il periodo, cioè la lunghezza della curva. La situazione è schematicamente illustrata in figura 8.5.

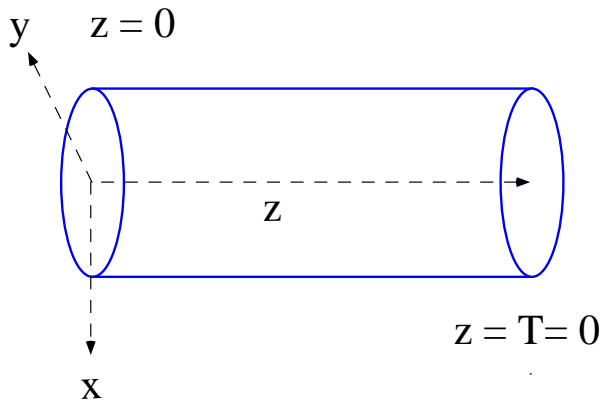


Figura 8.5: Coordinate del toro. Si pensi la superficie a $z = T$ identificata con quella a $z = 0$.

In questo caso, $\mathbf{j} \neq \mathbf{A}$, ma vale ancora

$$\nabla^2 \mathbf{j} = -\frac{\rho q}{2mc} \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{j}. \quad (8.83)$$

La (8.82) e la (8.83) implicano che la corrente \mathbf{j} nella direzione z circola soltanto sulla superficie del toro, *i.e.*, in uno strato di spessore dell'ordine di λ ; viceversa, all'interno del toro abbiamo $\mathbf{j} = 0$.

Quest'ultimo fatto significa che lungo il cerchio al centro del toro (la curva C della Fig.8.6)) vale

$$\hbar \nabla \theta = \frac{q}{c} \mathbf{A}, \quad (8.84)$$

per cui integrando questa equazione lungo C si ha (Eq.(8.82))

$$\frac{q}{c} \oint dx_i A_i = \hbar \int d\theta = 2\pi n \hbar. \quad (8.85)$$

L'ultima uguaglianza discende dalla richiesta di monodromia della funzione Ψ . D'altra parte,

$$\oint dx_i A_i = \int d\mathbf{S} \cdot \nabla \times \mathbf{A} = \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} = \Phi : \quad (8.86)$$

⁶Dal punto di vista matematico, le soluzioni non banali (8.82) rappresentano elementi del gruppo fondamentale di S^1 , $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

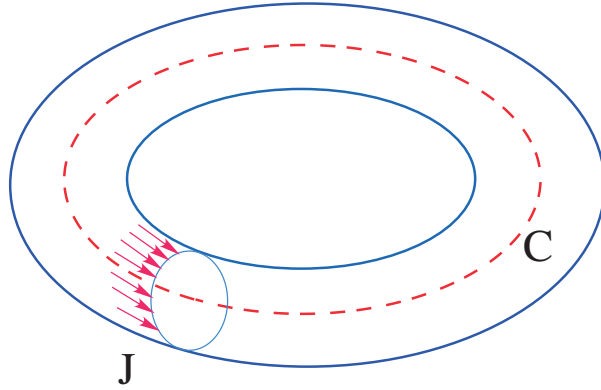


Figura 8.6: Schema di un anello toroidale superconduttore. Il flusso quantizzato è quello concatenato alla circonferenza C .

$\oint dx_i A_i$ è uguale al flusso magnetico intrappolato dal toro. Segue perciò che il flusso magnetico che attraversa un toro di superconduttore è quantizzato:

$$\Phi = \frac{2\pi n c \hbar}{q}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8.87)$$

Questa è la relazione (8.71) usata nel paragrafo precedente.

Complementi

8.A Formula di Poisson

La formula di Poisson è:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\theta + Tn) = \frac{1}{T} \sum_k \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}k\right) e^{i\frac{2\pi}{T}k\theta}, \quad (8.88)$$

dove \tilde{f} indica la trasformata di Fourier. In particolare per $T = 2\pi$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(\theta + 2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_k \tilde{f}(k) e^{ik\theta}. \quad (8.89)$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$F(\theta) = \sum_n f(\theta + Tn) :$$

questa è chiaramente una funzione periodica di periodo T sviluppabile in serie di Fourier

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \sum_k c_k e^{i\frac{2\pi}{T}k\theta}; \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_0^T d\theta F(\theta) e^{-i\frac{2\pi}{T}k\theta} = \frac{1}{T} \int_0^T d\theta e^{-i\frac{2\pi}{T}k\theta} \sum_n f(\theta + Tn) \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta f(\theta) e^{-i\frac{2\pi}{T}k\theta} = \frac{1}{T} \tilde{f}\left(\frac{2\pi}{T}k\right) \end{aligned}$$

che è la (8.88).

Integrali gaussiani

Ci saranno utili i seguenti integrali

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\frac{1}{2}ax^2+bx} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{b^2/2a}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\frac{1}{2}ax^2-ibx} = \sqrt{\frac{2\pi i}{a}} e^{-ib^2/2a}. \quad (8.90)$$

Il secondo è ottenuto dal primo con la sostituzione $a \rightarrow -ia$, $b \rightarrow -ib$ e va inteso come continuazione analitica.

Propagatore

Dalle (8.60) e dalla definizione (8.61) segue:

$$K(\theta, t; \theta', 0) = \sum_{\ell} \psi_{\ell}(\theta, t) \psi_{\ell}^*(\theta', 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ik(\theta-\theta')} e^{-it\frac{\hbar}{2mR^2}(k-\frac{eF}{2\pi\hbar c})^2}. \quad (8.91)$$

Il secondo esponenziale nella formula precedente si riscrive usando il secondo integrale delle (8.90) con

$$b = k - \frac{eF}{2\pi\hbar c}; \quad a = \frac{mR^2}{\hbar t},$$

nella forma

$$e^{-it\frac{\hbar}{2mR^2}(k-\frac{eF}{2\pi\hbar c})^2} = \sqrt{\frac{mR^2}{i2\pi\hbar t}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i\frac{mR^2}{2\hbar t}x^2} e^{-i(k-\frac{eF}{2\pi\hbar c})x},$$

cioè è la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{mR^2}{i2\pi\hbar t}} e^{i\frac{mR^2}{2\hbar t}x^2} e^{i\frac{eF}{2\pi\hbar c}x}. \quad (8.92)$$

Quindi dalla (8.91) e dalla formula di Poisson (letta da destra a sinistra) si ha, con $x = \theta - \theta'$ nella (8.92):

$$K(\theta, t; \theta', 0) = \sqrt{\frac{mR^2}{i2\pi\hbar t}} \sum_n e^{i\frac{mR^2}{2\hbar t}(\theta-\theta'+2\pi n)^2} e^{i\frac{eF}{2\pi\hbar c}(\theta-\theta'+2\pi n)}, \quad (8.93)$$

che coincide con la formula (8.62) usata nel testo.

8.B Oscillatore e stringa magnetica

Come semplice generalizzazione della particella vincolata ad un cerchio, consideriamo ancora il modello (8.53) in cui il campo magnetico è confinato nell'origine, mentre si ha un potenziale esterno V di tipo armonico che confina il moto. L'Hamiltoniana è perciò

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{2mr^2} \left(L_z - \frac{2\pi e}{c} F \right)^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2. \quad (8.94)$$

Poniamo per brevità

$$\kappa = \frac{L_z}{\hbar} - \frac{2\pi e}{\hbar c} F; \quad x = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} r; \quad \frac{\partial}{\partial r} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \frac{\partial}{\partial x}; \quad \varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}.$$

L'equazione agli autovalori prende la forma

$$\varepsilon\psi = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi + \frac{\kappa^2}{x^2} \psi + x^2 \psi = -\psi'' - \frac{1}{x} \psi' + \frac{\kappa^2}{x^2} \psi + x^2 \psi. \quad (8.95)$$

Posto

$$\psi = x^\kappa e^{-x^2/2} f,$$

si ha

$$x f'' + (1 + 2\kappa - 2x^2) f' + (\varepsilon - 2(1 + \kappa)) x f = 0. \quad (8.96)$$

La soluzione generale della (8.96) è

$$f(x) = C_a {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\kappa}{2}, 1 + \kappa, x^2\right) + C_b (-1)^\kappa x^{-2\kappa} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\kappa}{2}, 1 - \kappa, x^2\right),$$

dove ${}_1F_1(a, c; x)$ è la funzione ipergeometrica confluyente:

$${}_1F_1(a, c; z) = \Gamma(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1) \dots (a+n-1)}{\Gamma(c+n)} \frac{z^n}{n!}. \quad (8.97)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \psi = e^{-x^2/2} & \left[C_a x^\kappa {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\kappa}{2}, 1 + \kappa, x^2\right) + \right. \\ & \left. + C_b (-1)^\kappa x^{-\kappa} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\kappa}{2}, 1 - \kappa, x^2\right) \right]. \end{aligned} \quad (8.98)$$

La regolarità nell'origine impone $C_b = 0$ per $\kappa > 0$ e $C_a = 0$ per $\kappa < 0$. Asintoticamente

$${}_1F_1(a, c; z) \sim e^z z^{a-c}$$

quindi se si vogliono soluzioni a quadrato sommabile la serie deve troncarsi, questo può accadere se $a = -n$, nel qual caso la funzione ipergeometrica coincide con i polinomi di Laguerre. Si deve perciò avere

$$\begin{aligned} \kappa > 0: \quad (1 + \kappa) - \frac{\varepsilon}{2} &= -2n, & \frac{E}{\hbar\omega} &= 2n + \kappa + 1; \\ \kappa < 0: \quad (1 - \kappa) - \frac{\varepsilon}{2} &= -2n, & \frac{E}{\hbar\omega} &= 2n - \kappa + 1. \end{aligned}$$

Gli autovalori dell'energia sono perciò

$$E = \hbar\omega \left\{ 2n + 1 + \left| \ell - \frac{2\pi e}{\hbar c} F \right| \right\}. \quad (8.99)$$

Anche in questo caso l'effetto della stringa magnetica è stato quello di uno shift sugli autovalori dell'energia. Poichè $\ell \in \mathbb{Z}$ le autofunzioni sono monodrome.

8.C Complementi sull'effetto Aharonov-Bohm

In questo paragrafo presentiamo per comodità del lettore i risultati principali ottenuti da Aharonov e Bohm, e perfezionati in lavori successivi, nel caso di un modello esattamente solubile. Lo scopo è quello di mettere in luce i punti delicati ed alcune questioni di principio su cui non abbiamo ritenuto opportuno soffermarci nel testo principale.

Il modello è quello di stringa magnetica, già incontrato nel testo: un solenoide infinitamente sottile che trasporta un flusso di campo magnetico Φ . Si tratta di un problema bidimensionale. Il potenziale vettore ha solo una componente azimutale:

$$A_\theta = \frac{\Phi}{2\pi r}, \quad \Phi = \text{cost.}; \quad A_x = -\frac{y}{r} A_\theta, \quad A_y = \frac{x}{r} A_\theta. \quad (8.100)$$

L'equazione di Schrödinger ha la forma:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \psi + \frac{1}{2mr^2} \left(L_z - \frac{e}{2\pi c} \Phi \right)^2 \psi. \quad (8.101)$$

Per situazioni stazionarie, posto come di consueto $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$ l'equazione diventa

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 + k^2 \right] \psi = 0, \quad \alpha \equiv -\frac{e\Phi}{2\pi\hbar c}. \quad (8.102)$$

La situazione che vogliamo descrivere è quella stazionaria: un fascio elettronico incidente da $x = +\infty$, incontra la stringa magnetica. L'elettrone non può penetrare nel solenoide, e questo è schematizzato dalla condizione

$$\psi(0) = 0. \quad (8.103)$$

Se i potenziali hanno un effetto fisico si deve osservare una diffrazione dalla stringa, dipendente dal flusso Φ . La diffusione del fascio elettronico viene descritta in questo modo: la funzione d'onda asintotica, per grandi r , è scrivibile nella forma⁷

$$\psi = \psi_{inc.} + \psi_{diff} \sim \psi_{inc.} + f(\theta)(kr)^{-1/2} e^{ikr}. \quad (8.104)$$

La dipendenza da r in ψ_{diff} è quella di un'onda sferica in due dimensioni. Il numero di particelle al secondo che vengono diffuse ad un'angolo compreso tra θ e $\theta + d\theta$ è $|f(\theta)|^2 d\theta$, come si verifica immediatamente calcolando il flusso dell'onda diffusa. Matematicamente quindi bisogna procedere in questo modo:

- 1) Scrivere la funzione d'onda ψ_{in} che corrisponde alla situazione fisica che abbiamo scelto.
- 2) Risolvere l'equazione di Schrödinger (8.101). ψ_{in} è la condizione al bordo.

La determinazione di ψ_{in} è il primo punto delicato. In assenza di stringa un elettrone libero che viaggia lungo l'asse x in direzione negativa sarebbe descritto da una funzione d'onda $\psi = \exp(-ikx)$. Questa funzione però non è consistente come condizione al bordo, non soddisfa asintoticamente l'equazione (8.101) e non è consistente con l'invarianza di gauge. Infatti se si vuole descrivere un flusso costante di particelle occorre fissare ψ in modo che la corrente *gauge invariante*, vedi eq.(8.18):

$$\mathbf{j} = i \frac{\hbar}{2m} [(\nabla\psi)^* \psi - \psi^* (\nabla\psi)] - \frac{e}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2 \quad (8.105)$$

sia costante. La soluzione è considerare

$$\psi_{in} = \exp(-ikx - \alpha\theta) = \exp(-ikr \cos \theta - \alpha\theta). \quad (8.106)$$

L'intervallo di variazione di θ è $-\pi \leq \theta \leq +\pi$. La (8.106) non è periodica in θ , e su questo commenteremo in seguito, ma comunque descrive nella zona $\theta \sim 0$ un'onda incidente che dà luogo ad una corrente gauge invariante costante, come si può verificare usando le componenti cartesiane (8.100) per \mathbf{A} , e le relazioni $\partial_x \theta = -y/r^2$, $\partial_y \theta = x/r^2$. Si ottiene $j_x = -\hbar k/m$, $j_y = 0$, che corrisponde ad un flusso di una particella al secondo che viaggia in direzione dell'asse x negativo.

⁷Cominceremo in seguito su questa decomposizione.

Cerchiamo una soluzione *regolare*, quindi monodroma, dell'equazione (8.102). La periodicità e la regolarità in θ significa che L_z ha autovalori $\hbar\ell$, con ℓ *intero* quindi si può scrivere

$$\psi = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_\ell R_\ell(r) e^{i\ell\theta}, \quad (8.107)$$

e le funzioni d'onda radiali soddisfano a

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (\ell + \alpha)^2 + k^2 \right] R_\ell(r) = 0. \quad (8.108)$$

Passando a variabili adimensionali $z = kr$, vediamo che la (8.108) è l'equazione che definisce le funzioni di Bessel, la soluzione generale è

$$A J_{\ell+\alpha} + B J_{-(\ell+\alpha)}.$$

Poichè $J_\nu(z) \sim z^\nu$ per $z \rightarrow 0$ le soluzioni regolari, vedi eq.(8.103), sono $J_{|\ell+\alpha|}$ e quindi:

$$\psi = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} a_\ell J_{|\ell+\alpha|}(z) e^{i\ell\theta}. \quad (8.109)$$

I coefficienti a_ℓ devono essere determinati in modo da soddisfare la condizione al contorno.

Riportiamo ora i risultati principali di Aharonov Bohm, rimandando al lavoro originale per le dimostrazioni:

1) I coefficienti a_ℓ valgono

$$a_\ell = (-i)^{|\ell+\alpha|}; \quad (8.110)$$

2) Separiamo la soluzione (8.109) a seconda del segno di ℓ :

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_1 + \psi_2 + \psi_3, & \psi_3 &= (-i)^{|\alpha|} J_{|\alpha|}(z), \\ \psi_1 &= \sum_{\ell=1}^{+\infty} (-i)^{|\ell+\alpha|} J_{|\ell+\alpha|}(z) e^{i\ell\theta}, & \psi_2 &= \sum_{\ell=-\infty}^{-1} (-i)^{|\ell+\alpha|} J_{|\ell+\alpha|}(z) e^{i\ell\theta}. \end{aligned} \quad (8.111)$$

Si ha subito:

$$\psi_2(r, \theta, \alpha) = \psi_1(r, -\theta, -\alpha). \quad (8.112)$$

Utilizzando lo sviluppo asintotico delle funzioni di Bessel, è possibile valutare le somme (8.111):

$$\psi_1 \rightarrow \begin{cases} 0, & \theta < 0; \\ e^{-i\alpha\theta} e^{-ikx}, & \theta > 0; \end{cases} \quad \psi_2 \rightarrow \begin{cases} e^{-i\alpha\theta} e^{-ikx}, & \theta < 0; \\ 0, & \theta > 0; \end{cases} \quad \psi_3 \sim \mathcal{O}(r^{-1/2}).$$

Questo è *esattamente* il risultato aspettato dall'analisi dell'esperimento di interferenza, la soluzione nei due semipiani è asintoticamente una trasformata di gauge della soluzione libera. Notiamo che semiclassicamente i momenti angolari $\ell > 0$ corrispondono a traiettorie di elettroni con momento angolare positivo e quindi passanti nel semipiano superiore (almeno per grandi ℓ), viceversa $\ell < 0$ corrisponde a traiettorie nel semipiano inferiore.

- 3) Per $r \rightarrow \infty$ e $|\pi - \theta| > 1/r$ è possibile valutare lo sviluppo asintotico, compreso il termine di onda divergente, ottenendo:

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha\theta - ikr \cos \theta} + \frac{e^{ikr}}{(2\pi ikr)^{1/2}} \sin \pi\alpha \frac{e^{-i\theta/2}}{\cos(\frac{\theta}{2})}. \quad (8.113)$$

Corrispondente ad una sezione d'urto

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\sin^2 \alpha}{2\pi k} \frac{1}{\cos^2 \theta/2}. \quad (8.114)$$

Notiamo che l'apparente non monodromia della (8.113) è dovuta solamente al fatto che lo sviluppo asintotico delle funzioni di Bessel non è uniforme, usando sviluppi più sofisticati, vedi ad esempio le referenze [Alv] si mostra esplicitamente che la funzione d'onda ψ è monodroma, come d'altronde è stato imposto sin dall'inizio. Notiamo che la sezione d'urto è *periodica* nel parametro di flusso α , confermando le aspettative dell'esperienza con le frange di interferenza.

Un'analisi alternativa dell'equazione (8.102) è fornita nella referenza [Ber1]: una tecnica simile a quella vista nel paragrafo 8.A permette di ottenere la soluzione di Aharonov-Bohm sommando su un intero che rappresenta il numero di "giri" attorno alla singolarità.

Nel caso particolare $\alpha = 1/2$ la somma su ℓ nell'equazione (8.109) può essere effettuata analiticamente il risultato è:

$$\psi = i^{1/2} e^{-i(\frac{\theta}{2} + kr \cos \theta)} \int_0^{[kr(1+\cos \theta)]^{1/2}} \exp(iz^2) dz. \quad (8.115)$$

In questo caso la monodromia è evidente: la funzione d'onda ψ è nulla sulla linea $\theta = \pi$.

Vogliamo infine citare il fatto che la soluzione può anche essere scritta nel caso in cui la stringa magnetica sia circondata da un cilindro impenetrabile di raggio $R > 0$, nel limite $R \rightarrow 0$ si riottiene la soluzione di Aharonov-Bohm.

A titolo di esempio riportiamo in figura 8.7 la probabilità $|\psi|^2$ in funzione di θ a distanza fissa $z = |r \cos \theta|$ dal solenoide. Si nota l'immagine geometrica (allargata) del solenoide, cioè l'ombra, e le frange di massima intensità ai lati. Ovviamente al crescere della distanza l'ombra si riduce a un singolo punto e le frange si avvicinano all'angolo $\theta = \pi$, quello centrale in figura. A fissa distanza z la posizione delle frange dipende dal flusso magnetico.

8.C.1 Teorema di Eherenfes

Abbiamo visto che si ha diffusione in presenza di una stringa magnetica. Visto che il campo magnetico è nullo, come è compatibile questa conclusione con il teorema di Eherenfes? Consideriamo uno stato qualunque ψ e calcoliamo la variazione nel tempo del valor medio dell'impulso (meccanico), questo è quanto di più simile alla forza si possa definire in un contesto quantistico:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= m \frac{d}{dt} \int [\psi^* \mathbf{v} \psi] = \frac{i}{\hbar} \int \{ (H\psi)^* m \mathbf{v} \psi - \psi^* m \mathbf{v} H\psi \} = \\ &= \frac{i}{\hbar} \int \{ (H\psi)^* m \mathbf{v} \psi - \psi^* H m \mathbf{v} \psi \} + \frac{i}{\hbar} \int \psi^* [H, m \mathbf{v}] \psi. \end{aligned} \quad (8.116)$$

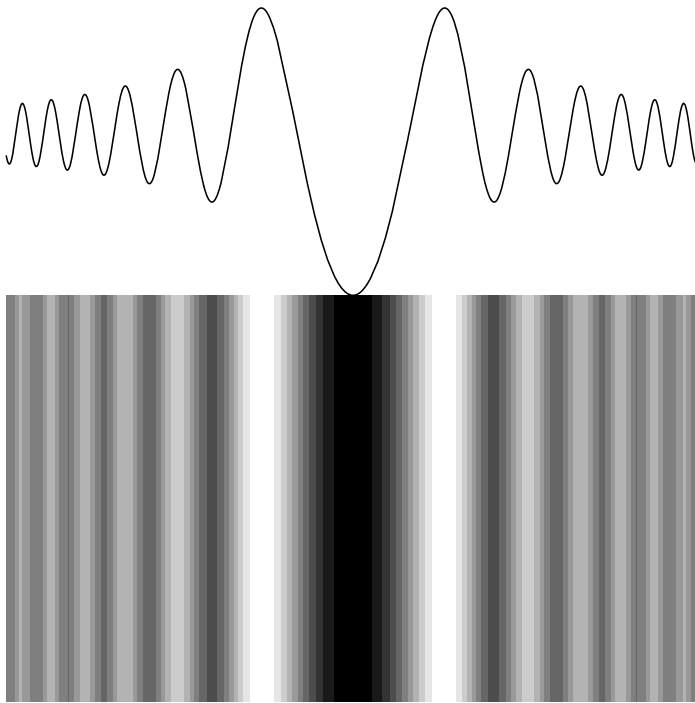


Figura 8.7: $|\psi|^2$, eq.(8.115), per $z = 200/k$.

Usando le regole di commutazione (8.18) per il vettore \mathbf{v} , il secondo termine della (8.116) si riduce a

$$\frac{e}{2c} \int \psi^* [\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} - \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}] \psi$$

che è l'usuale forza di Lorentz. Questo termine è nullo nel caso di una stringa magnetica. Il primo termine nella (8.116) è usualmente trascurato perchè se l'operatore H è autoaggiunto si annulla. Nel nostro caso il problema ha una singolarità nell'origine quindi valutiamo questo contributo isolando l'origine con un piccolo cerchio di raggio r , alla fine del calcolo faremo il limite $r \rightarrow 0$. Il dominio di integrazione è limitato da un cerchio di raggio r e da un cerchio di raggio R che manderemo all'infinito. Gli integrali verranno trasformati in integrali di superficie tramite il teorema di Gauss. Il contributo dal cerchio R è trascurato, è il caso che si verifica, ad esempio, con pacchetti d'onda localizzati⁸.

Consideriamo una singola componente della velocità, ad esempio v_x , dobbiamo valutare

$$\frac{i}{\hbar} \int \{ (H\psi)^* m v_x \psi - \psi^* H m v_x \psi \}. \quad (8.117)$$

⁸Per il segno nelle espressioni seguenti ricordiamo che la normale esterna alla superficie di raggio r è diretta in senso contrario a \mathbf{r} .

L'Hamiltoniana, usando $\nabla \mathbf{A} = 0$, ha la forma

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e\hbar}{imc} \mathbf{A} \nabla + \frac{e^2}{2mc^2} \mathbf{A}^2.$$

Il termine quadratico in \mathbf{A} non dà alcun contributo alla (8.117). Il termine lineare si scrive:

$$\begin{aligned} \frac{e}{mc} \int d^2x [(\nabla \psi^*) \mathbf{A} m v_x \psi + \psi^* \mathbf{A} \nabla m v_x \psi] &= \frac{e}{mc} \int d^2x \nabla (\psi^* \mathbf{A} m v_x \psi) = \\ &= -\frac{e}{mc} \int r d\theta \frac{\partial}{\partial r} (\psi^* A_r m v_x \psi) = 0. \end{aligned}$$

L'integrale si annulla perchè $A_r = 0$. Passiamo ora al termine in ∇^2 .

$$\begin{aligned} &-\frac{i\hbar}{2m} \int d^2x \{ \nabla^2 \psi^* m v_x \psi - \psi^* \nabla^2 m v_x \psi \} = \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \int d^2x \nabla \{ (\nabla \psi^*) m v_x \psi - \psi^* \nabla (m v_x \psi) \} \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} \int r d\theta \left\{ \psi^* \frac{\partial}{\partial r} (m v_x \psi) - \left(\frac{\partial}{\partial r} \psi^* \right) m v_x \psi \right\}. \end{aligned} \quad (8.118)$$

Dovremo effettuare il limite $r \rightarrow 0$ dell'espressione precedente. Nel caso della soluzione di Aharonov-Bohm, avendosi $\psi(0) = 0$, i contributi finiti devono sorgere da singolarità nelle derivate. Scriviamo l'espressione per gli operatori $m\mathbf{v}$ nel caso della stringa magnetica

$$m v_x = p_x - \frac{e}{c} A_x = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{e\hbar}{c} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{y}{r^2} \right] = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha \frac{y}{r^2} \right] \equiv \frac{\hbar}{i} D_x; \quad (8.119a)$$

$$m v_y = p_y - \frac{e}{c} A_y = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} - i \frac{e\hbar}{c} \frac{\Phi}{2\pi} \frac{x}{r^2} \right] = \frac{\hbar}{i} \left[\frac{\partial}{\partial y} + i\alpha \frac{x}{r^2} \right] \equiv \frac{\hbar}{i} D_y. \quad (8.119b)$$

Consideriamo per semplicità il caso $0 \leq \alpha \leq 1/2$. Dallo sviluppo in serie delle funzioni di Bessel

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} (1 + \mathcal{O}(z)) \quad (8.120)$$

segue che i termini principali (con derivata divergente) per ψ nello sviluppo (8.111) provengono dai contributi ψ_2 e ψ_3 :

$$\psi_2 \sim e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} J_{1-\alpha} e^{-i\theta} \rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\alpha)} \left(\frac{1}{2} k r \right)^{1-\alpha} \frac{e^{-i\theta}}{\Gamma(2-\alpha)} \equiv C_2 r^{-\alpha} (x - iy); \quad (8.121a)$$

$$\psi_3 \sim e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} J_\alpha \rightarrow e^{-i\frac{\pi}{2}\alpha} \left(\frac{1}{2} k r \right)^\alpha \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \equiv C_3 r^\alpha. \quad (8.121b)$$

Le derivate si calcolano facilmente:

$$\begin{aligned} D_x \psi &= C_2 (1-\alpha) r^{-\alpha} + C_3 \alpha r^{\alpha-2} e^{-i\theta}; \\ D_y \psi &= i [-C_2 (1-\alpha) r^{-\alpha} + C_3 \alpha r^{\alpha-2} e^{-i\theta}]. \end{aligned}$$

Quindi, per piccoli r :

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial r} D_x \psi = [C_2^* r^{1-\alpha} e^{i\theta} + C_3^* r^\alpha] \frac{\partial}{\partial r} [C_2 (1-\alpha) r^{-\alpha} + C_3 \alpha r^{\alpha-2} e^{-i\theta}] \quad (8.122a)$$

$$\rightarrow \frac{\alpha(a-\alpha)}{r} [-C_2 C_3^* - C_2^* C_3] = -2 \frac{\alpha(a-\alpha)}{r} \text{Re}(C_2 C_3^*); \quad (8.122b)$$

$$\psi^* \frac{\partial}{\partial r} D_y \psi = [C_2^* r^{1-\alpha} e^{i\theta} + C_3^* r^\alpha] \frac{\partial}{\partial r} i [-C_2 (1-\alpha) r^{-\alpha} + C_3 \alpha r^{\alpha-2} e^{-i\theta}] \quad (8.122c)$$

$$\rightarrow i \frac{\alpha(a-\alpha)}{r} [C_2 C_3^* - C_2^* C_3] = -2 \frac{\alpha(a-\alpha)}{r} \text{Im}(C_2 C_3^*). \quad (8.122d)$$

si verifica facilmente che il termine $-\partial_r \psi^* D_i \psi$ dà lo stesso contributo. Sostituendo nella (8.118), effettuando il limite $r \rightarrow 0$ e l'integrale in θ :

$$f_x = -\frac{\hbar^2}{2m} 2\pi [-4\alpha(a-\alpha) \text{Re}(C_2 C_3^*)] \quad f_y = -\frac{\hbar^2}{2m} 2\pi [-4\alpha(a-\alpha) \text{Im}(C_2 C_3^*)].$$

Dalle (8.121) segue

$$C_2 C_3^* = e^{-i\pi/2} e^{i\pi\alpha} \frac{k}{2} \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(1+\alpha)} = (\sin(\pi\alpha) - i \cos(\alpha)) \frac{k}{2} \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}$$

Da cui

$$f_x = \frac{2\hbar^2 k}{m} \sin^2(\pi\alpha) \quad f_y = -\frac{2\hbar^2 k}{m} \sin(\pi\alpha) \cos(\pi\alpha). \quad (8.123)$$

Vediamo quindi che nel calcolo quantistico la forza viene fornita da un termine di superficie, che si aggiunge all'espressione classica del teorema di Eherenfest.

La forza lungo l'asse x ha un'interpretazione semplice. Una particella che diffonde ad angolo θ ha un impulso $p_x = \hbar k \cos \theta$. L'impulso iniziale, nella configurazione usata, è $p_x = -\hbar k$, quindi la variazione di impulso è

$$\Delta p_x = \hbar k (1 + \cos \theta) = \hbar k 2 \cos^2(\frac{\theta}{2}).$$

Se Φ è il flusso iniziale, il numero di diffusioni al secondo ad angolo θ è $\Phi d\sigma/d\theta$ quindi

$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \Phi \int d\theta \frac{d\sigma}{d\theta} \Delta p_x.$$

Il flusso corrispondente ad un'onda piana è $\hbar k/m$ quindi

$$\frac{d\langle p_x \rangle}{dt} = \frac{\hbar^2 k^2}{m} \int d\theta 2 \cos^2(\frac{\theta}{2}) \frac{\sin^2(\pi\alpha)}{2\pi k} \frac{1}{\cos^2 \theta/2} = \frac{2\hbar^2 k}{m} \sin^2(\pi\alpha)$$

che coincide col risultato precedente. Per p_y non si può fare lo stesso ragionamento perchè si ha una grossa variazione di fase della funzione d'onda lungo l'asse y nella regione $\theta \sim \pi$ in cui l'espressione asintotica (8.114) non vale.

NOTA: Per evitare fraintendimenti sottolineiamo che l'Hamiltoniana è un operatore autoaggiunto, i termini di bordo che nascono nel calcolo precedente sono dovuti alla presenza degli operatori v_x, v_y .

Indicazioni bibliografiche

L'articolo di Wu e Yang [WY75] è la referenza standard per l'introduzione del concetto di integrale di cammino del campo A_μ come variabile essenziale in meccanica quantistica.

Una trattazione relativamente semplice della superconduttività, e compatibile con una conoscenza elementare della meccanica quantistica, si trova nel terzo volume delle lezioni di Feynman [Fey3].

La letteratura sull'effetto Aharonov-Bohm è molto vasta e ci contenteremo qui di indicare alcune fonti che abbiamo trovato particolarmente utili. L'articolo originale di Aharonov e Bohm è del 1959 [AB59], negli altri articoli citati si può trovare una discussione degli autori su vari aspetti del problema. Gli articoli del gruppo guidato da Tonomura [To1], possono essere utilmente integrati dall'articolo di rivista [To2]. Una istruttiva rassegna, anche per gli aspetti sperimentali, è il libro di Peshkin e Tonomura [PT], è altresì utile la rassegna di Olariu e Iovitzu Popescu [OIP]. In queste due ultime opere si trovano molte referenze e discussioni, anche per quanto riguarda i risultati sperimentali precedenti i lavori di Tonomura e non citati nella nostra brevissima presentazione.

Due articoli molto interessanti, soprattutto per gli aspetti che saranno trattati più in dettaglio nell'appendice 8.C sono quelli di Berry [Ber1] e di Jackiw e Redlich [JR83].

Bibliografia

- [AB59] Y. Aharonov, D. Bohm: *Phys. Rev.* **115**, 485, (1959); *Phys. Rev.* **123**, 1511, (1961); *Phys. Rev.* **125**, 2192, (1962); *Phys. Rev.* **130**, 1625, (1963).
- [Ber1] M.V. Berry: *Eur. J. Phys.* **1**, 240, (1980).
- [DNF] B. Doubrovine, S. Novikov, R. Fomenko: *Geometrie Contemporaine, methodes et applications*, 3 vol., ed. Mir, Mosca.
- [Alv] M. Alvarez: *Phys. Rev. A* **54**, 1128, (1996).
- [Fey3] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands: *The Feynman Lectures on Physics*, Vol.3, Addison-Wesley Pub. Company.
- [JR83] R. Jackiw, A.N. Redlich: *Phys. Rev. Lett.* **50**, 555, (1983).
- [Fla] H. Flanders: *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences*, Dover Publications, 1989.
- [NS] C. Nash, S. Sen: *Topology and Geometry for Physicists.*, Academic Press, 1983.
- [OIP] S. Olariu, I. Iovitzu Popescu: *Rev. Mod. Phys.* **57**, 339, (1985).
- [PT] M. Peshkin, A. Tonomura: *The Aharonov-Bohm Effect*, Lectures Notes in Physics, Springer-Verlag 1989.
- [To1] A. Tonomura, S. Yano, N. Osakabe, T. Matsuda, H. Yamada, T. Kawasaki, J. Endo: *Proc. 2nd Int. Simp. Foundations of Quantum Mechanics*, Tokyo, 97, (1986); *Phys. Rev. Lett.* **56**, 792, (1986).
- [To2] A. Tonomura: *Int. Journ. of Mod. Physics A* **15**, 3427, (2000).
- [WY75] T.T. Wu, C.N. Yang: *Phys. Rev. D* **12**, 3845, (1975).