0.1 Disuguaglianze di Bell, Disuguaglianza di CHSH e Quantum Entanglement

0.1.1 Problema

L'aspetto probabilistico della meccanica quantistica, nonstante innumereboli verifiche sperimentali, ci produce tuttora un certo senso di inquietudine. Il paradosso di Einstein-Podolsky-Rosen è stato infatti proposto per "dimostrare che la meccanica quantistica non poteva essere una teoria completa, ma che essa doveva essere completata da variabili addizionali, di modo che la natura probabilistica della predizione della Meccanica Quantistica fosse dovuta alla media statistica su queste variabili (dette *variabili nascoste*). Le ipotesi fondamentali del loro argomento sono la località e la causalità.

J.S. Bell ha formulato l'idea delle variabili nascoste matematicamente, ed ha dimostrato che, indipendentemente dalla natura delle variabili nascoste, tale teoria non può riprodurre completamente le predizioni della meccanica quantistica.

Le verifiche sperimentali successivamente escogitate hanno confermato l'esattezza delle predizioni della meccanica quantistica, escludendo così qualsiasi tipo di teorie con variabili nascoste.

L'esempio considerato da Bell (**Physics** 1 (1964) p.195) è quello di un sistema di due spin $\frac{1}{2}$, in uno stato di singoletto, $S_{tot} = 0$,

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle], \tag{1}$$

dove $s_z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}|\uparrow\rangle$, etc. Supponiamo che le due particelle A, B siano i prodotti di decadimento di una particella parente con $J = 0$ e che le particelle A, B viaggino in due direzioni opposte, di modo tale che la misura eseguita sulla particella A non può influenzare il risultato della misura fatta sulla particella B (o vice versa). Supponiamo inoltre che gli osservatori A e B misurino la componente di spin A o B, i.e., $(\mathbf{a}\cdot\sigma_A)$, $(\mathbf{b}\cdot\sigma_B)$, dove $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sono due versori arbitrari.

Prima consideriamo il caso particolare, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. La misura di $(\mathbf{a}\cdot\sigma_A)$, dà o $+1$ o -1 come risultato. Supponiamo che la misura della quantità $(\mathbf{a}\cdot\sigma_B)$, sia fatta immediatamente dopo quella di A. Nel caso $(\mathbf{a}\cdot\sigma_A) = 1$ il risultato di $(\mathbf{a}\cdot\sigma_B)$, è predetto con certezza ad essere -1, e vice versa. Visto che la misura a A non può influenzare dinamicamente quella di B per ipotesi (la località e la causalità), sembrerebbe che tale predittività del risultato di singole misure contradisca con il principio della meccanica quantistica, secondo il quale il risultato dovrebbe essere ± 1, con *probabilità* $\frac{1}{2}$ per ciascuno. L'unica via di uscita sembrerebbe che in realtà le cose siano "predeterminate: l'aspetto probabilistico della predizione della meccanica quantistica sarebbe dovuto alla mancanza della conoscenza - nel senso classico - del processo microscopico. Perciò la meccanica quantistica dovrebbe essere sostituito da una teoria più completa, con delle variabili addizionali, di modo che le predizioni probablistiche della meccanica quantistica seguono come legge statistica su quese ultime.

Questa argomentazione in realtà non è corretta. Infatti, visto che i due eventi (le misure di A e di B) non possono essere collegati causalmente, anche l'informazione che riguarda i risultati della misura di A risulta inutile (o meglio, inutilizzabile) per l'osservatore B. Infatti, non avendo accesso ai risultati di A (almeno non immediatamente prima della misura), l'osservatore B troverebbe semplicemente per la metà delle volte il risultato $+1$ e per l'altra metà delle volte -1, in accordo con la predizione standard della meccanica quantistica. Inoltre, il concetto della successione cronologica dei due eventi non è un concetto relativisticamente invariante. Secondo la teoria della relatività speciale, si può realizzare una situazione di modo che sia A che B vede, nel loro rispettivo sitema di riferimento, la propia misura anticedente alla misura dell'altro osservatore. In questo caso l'impostazione del "paradosso stesso non avrebbe senso.

Resta tuttavia il fatto che, paragonando le registrazioni delle successive misure fatte a A con quelle fatte a B, si può *a posteriori* verificare la *correlazione* tra i risultati dei due esperimenti. Secondo la meccanica quantistica una successione di risultati ad A, $(++-+--\ldots)$, dovrebbe essere accompagnato dalla successione $(--+-++\ldots)$, trovata a B: le due serie di risultati sono perfettamente correlate. Naturalmente questa predizione della meccanica quantistica è verificata sperimentalmente.

Dal punto di vista filosofico la situazione appare infatti un po' paradossale. Per l'osservatore B, la successione $(--+-++\ldots)$, appare completamente casuale. Ogni misura dà il risultato o 1 o -1, con probabilità $\frac{1}{2}$ ciascuno, la funzione d'onda essendo la (2.154) prima della misura. Se si dovesse considerare il collasso della funzione d'onda [1] dovuta ad ogni misura a B, per es.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}[|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle] \Longrightarrow |\downarrow\uparrow\rangle, \tag{2}$$

come processo fisico (che avviene attorno al punto B in un determinato momento), la predizione della meccanica quantistica implicherebbe che la misura fatta al punto B induce istantaneamente il collasso della funzione d'onda anche al punto A. Il che sarebbe una violazione grossolana della località delle interazioni e della causalità.

Nel caso in cui i due apparecchi à la Stern-Gerlach sono orientati in maniera generica, i risultati delle misure a B non saranno più univocamente determinati da quelli delle misure fatte a A. Per es., la successione di risultati ad A $(++-+--\ldots)$ potrebbe essere accompagnata da $(+-++-+\ldots)$ con assenza apparente delle correlazioni tra le due. In questo caso, dunque, non ci sono contraddizioni?

Il fatto è che la meccanica quantistica dà una precisa predizione sulla media della correlazione tra le due serie di misure, per generico orientamento relativo di **a** e **b**. Se definiamo la correlazione spin-spin,

$$F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \langle(\mathbf{a}\cdot\sigma_A)(\mathbf{b}\cdot\sigma_B)\rangle = \overline{R(\mathbf{a}\cdot\sigma_A)R(\mathbf{b}\cdot\sigma_B)}, \tag{3}$$

dove $R(\mathbf{a}\cdot\sigma_A) = \pm 1$ e $R(\mathbf{b}\cdot\sigma_B) = \pm 1$ rappresentano i possibili risultati delle misure, la meccanica quantistica predice che ci sia una correlazione tra le due registrazioni,

$$\text{M.Q.:} \qquad F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \langle(\mathbf{a}\cdot\sigma_A)(\mathbf{b}\cdot\sigma_B)\rangle = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = -\cos\theta, \tag{4}$$

(*dimostratelo*) dove θ è l'angolo tra **a** e **b**. **Il problema è perciò ben definito, indipendente da qualsiasi questione filosofica: è capace una teoria di tipo con le variabili nascoste, riprodurre esattamente il risultato della meccanica quantistica, Eq.(2.157)?**

0.1.2 Dimostrazione

La dimostrazione che la risposta è negativa, è stata data da J.S. Bell (1960). Siano

$$A(\mathbf{a},\lambda) = \pm 1, \qquad B(\mathbf{b},\lambda) = \pm 1 \tag{5}$$

la predizione per $R(\mathbf{a}\cdot\sigma_A)$ e $R(\mathbf{b}\cdot\sigma_B)$, rispettivamente, di una teoria con variabili nascoste $\{\lambda\}$. Naturalmente teorie che predicono i risultati diversi da ± 1 possono essere esclusi, visto che tale è un fatto empirico.

La correlazione spin-spin è dato, in questa teoria da

$$\text{Teo. Var. Nasc:} \qquad F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \int d\lambda\, \mathcal{P}(\lambda) A(\mathbf{a},\lambda) B(\mathbf{b},\lambda), \tag{6}$$

dove $\mathcal{P}(\lambda)$ è la probabilità statistica per vari valori di λ, con [2]

$$\mathcal{P}(\lambda) \geq 0, \quad \forall\lambda, \qquad \int d\lambda\, \mathcal{P}(\lambda) = 1. \tag{7}$$

[1] Erwin Schrödinger disse: "If we should go on with this dammned wave function collapse, then I'm sorry that I ever got involved.

[2] Tutte le formule saranno scritte con una variabile λ, ma la generalizzazione ai casi con più variabili è immediata.

Inoltre, per garantire che questo modello riproduca il risultato della meccanica quantistica per il caso particolare, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, possiamo porre

$$B(\mathbf{a},\lambda) = -A(\mathbf{a},\lambda) \tag{8}$$

per cui

$$F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -\int d\lambda\, \mathcal{P}(\lambda) A(\mathbf{a},\lambda) A(\mathbf{b},\lambda). \tag{9}$$

Ora consideriamo

$$\begin{aligned} & F(\mathbf{a},\mathbf{b}) - F(\mathbf{a},\mathbf{c}) \\ = \; & -\int d\lambda\, \mathcal{P}(\lambda) \left[A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda) - A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda)\right] \\ = \; & \int d\lambda\, \mathcal{P}(\lambda) A(\mathbf{a},\lambda)A(\mathbf{b},\lambda)\left[A(\mathbf{b},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda) - 1\right], \end{aligned} \tag{10}$$

perciò

$$\begin{aligned} & |F(\mathbf{a},\mathbf{b}) - F(\mathbf{a},\mathbf{c})| \leq \int d\lambda\, \mathcal{P}(\lambda) \left(1 - A(\mathbf{b},\lambda)A(\mathbf{c},\lambda)\right) \\ = \; & 1 + F(\mathbf{b},\mathbf{c}). \end{aligned} \tag{11}$$

Dunque in qualsiasi teoria con delle variabili nascoste, la correlazione spin-spin soddisfa la disuguaglianza,

$$|F(\mathbf{a},\mathbf{b}) - F(\mathbf{a},\mathbf{c})| \leq 1 + F(\mathbf{b},\mathbf{c}). \tag{12}$$

(*Disuguaglianza di Bell*). Si vede facilmente che la meccanica quantistica viola tale relazione. Se $\mathbf{a}$ è in una generica direzione e $\mathbf{b} \simeq \mathbf{c}$, il primo membro della (2.165) sarà dell'ordine di $O(|\mathbf{b}-\mathbf{c}|)$: di conseguenza la funzione $F(\mathbf{b},\mathbf{c})$ non può essere al minimo stazionario e uguale a -1, poiché in questo caso il secondo membro sarebbe dell'ordine di $O((\mathbf{b}-\mathbf{c})^2)$. Visto che in meccanica quantistica, la funzione di correlazione spin-spin è $F(\mathbf{a},\mathbf{b}) = -(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$ e ha il minimo stazionario ad $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, concludiamo che nessuna teoria del tipo (2.162) può riprodurre le predizioni della meccanica quantistica per tutte le scelte di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Bell ha dimostrato che è possibile costruire un modello di una teoria con variabili nascoste, se tal modello dovesse riprodurre il risultato della meccanica quantistica soltanto per particolare configurazioni di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, per es. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, $\mathbf{a} = -\mathbf{b}$, o $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$. È l'impossibilità che tale modello "imiti perfettamente la predizioni della meccanica quantistica per tutte le scelte di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, che esclude teorie di questo genere come teorie fisiche.

La correlazione tra le due particelle che non possono interagire né nel presente né in futuro, ma che sono interagite nel passato, come nell'esempio di due elettroni, è caratteristica tipica di tutti i sistemi quantistici. Questa correlazione, sperimentalmente osservata e perfettamente in accordo con la predizione della meccanica quantistica, ma che non può essere riprodotta da nessun tipo di teoria con variabili statistiche classiche addizionnali, è nota come "Quantum Entanglement.

0.1.3 Coppie di fotoni correlati

Si può fare un'analisi molto analoga con una coppia di fotoni, invece di elettroni. Consideriamo un atomo in uno stato eccitato con $J = 0$, che decade con due successive transizioni a dipolo elettrico,

$$(J = 0) \to (J = 1) \to (J = 0), \tag{13}$$

processo chiamato cascata atomica SPS. Se i due fotoni sono osservati in direzioni opposte, essi avranno la stessa polarizzazione. Infatti, gli stati iniziali e finali dell'atomo sono ambedue invarianti per rotazioni tridimensionali. Segue che anche lo stato di due fotoni deve essere invariante. Se indichiamo con

$$|x\rangle|x\rangle, \quad |x\rangle|y\rangle, \quad |y\rangle|x\rangle, \quad |y\rangle|y\rangle, \tag{14}$$

i quattro possibili stati di polarizzazioni lineari dei due fotoni, soltanto le due combianzioni lineari

$$\psi_+ = \frac{|x\rangle|x\rangle + |y\rangle|y\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \psi_- = \frac{|x\rangle|y\rangle - |y\rangle|x\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{15}$$

sono invarianti per rotazioni attorno all'asse z (la direzione dell'impulso di uno dei fotoni). Visto che le interazioni elettromagnetiche sono invarianti per parità, si trova che la funzione d'onda corretta dei due fotoni in questo sistema è $\psi_+ = \frac{|x\rangle|x\rangle+|y\rangle|y\rangle}{\sqrt{2}}$.

La misura della polarizzazione e i possibili risultati per un fotone sono descritti dall'operatore

$$P_1 = |x\rangle\langle x| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{16}$$

che misura la polarizzazione lineare nella direzione x, con il risultato 1 o 0. (Vedi la (**??**)), o da

$$P_2 = |y\rangle\langle y| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

che misura la polarizzazione lineare nella direzione y, o più in generale da

$$P_\theta = (|x\rangle\cos\theta + |y\rangle\sin\theta)(\langle x|\cos\theta + \langle y||\sin\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{18}$$

che misura la polarizzazione lineare nella direzione $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Gli autovalori di questi operatori sono 1 o 0. Introdurremo operatori associati

$$\Sigma_\theta \equiv 2P_\theta - 1, \qquad \Sigma_{1,2} \equiv 2P_{1,2} - 1 \tag{19}$$

con autovalori ± 1.

Se i due osservatori misurassero la stessa polarizzazione, per es., Σ_1, le due registrazioni saranno perfettamente correlati, per es., $A : (++----+\ldots)$ e $B : (++----+\ldots)$. Lo stesso vale se i due polarizzatori sono messi nella stessa direzione $(\cos\theta, \sin\theta, 0)$. Se invece i due osservatori misurano la polarizzazione in due direzioni generiche $A : (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ e $B : (\cos\theta', \sin\theta', 0)$, allora la predizione della meccanica quantistica per la correlazione

$$F(\theta, \theta') = \overline{R(\Sigma_\theta)R(\Sigma_{\theta'})} \tag{20}$$

è

$$\langle\psi_+|\Sigma_\theta \otimes \Sigma_{\theta'}|\psi_+\rangle = \cos 2(\theta - \theta'). \tag{21}$$

L'argomento di Bell si applica esattamente (quasi) così com'è, alla correlazione $F(\theta, \theta')$:

$$F(\theta, \theta') = \int d\lambda\, \mathcal{P}(\lambda) A(\theta, \lambda) A(\theta', \lambda), \qquad A(\theta, \lambda) = \pm 1. \tag{22}$$

Perciò in una teoria qualsiasi con le variabili nascoste, si avrà la disuguaglianza,

$$|F(\theta, \theta') - F(\theta, \theta'')| \leq 1 - F(\theta'', \theta'). \tag{23}$$

Tale disuguagliaza è violata dalla meccanica quantistica per generica scelta di $\theta, \theta', \theta''$.
Esercizio Dimostrare che la disuguagliaza di Bell (2.176) è violata dalla meccanica quantistica (2.174), per es. per $\theta - \theta' = \theta' - \theta'' = \frac{\pi}{6}$.

La disuguaglianza di Bell può essere generalizzata. Una combinazione delle funzioni di correlazione,

$$F(\theta_1, \theta_2) + F(\theta_3, \theta_2) + F(\theta_1, \theta_4) - F(\theta_3, \theta_4) \tag{24}$$

è data, secondo una teoria con variabili nascoste, dall'espressione

$$\int d\lambda\, \mathcal{P}(\lambda)\, [\, (A(\theta_1,\lambda) + A(\theta_3,\lambda))\, A(\theta_2,\lambda) + (A(\theta_1,\lambda) - A(\theta_3,\lambda))\, A(\theta_4,\lambda)\,]. \qquad (25)$$

Ma l'espressione tra la parentesi quadrata di (2.178) è sempre ± 2, poiché se $A(\theta_1,\lambda) = A(\theta_3,\lambda)$ il primo termine è ± 2 mentre se $A(\theta_1,\lambda) = -A(\theta_3,\lambda)$ il secondo termine è ± 2. Segue perciò (disugualgianza di CHSH)

$$|\, F(\theta_1,\theta_2) + F(\theta_3,\theta_2) + F(\theta_1,\theta_4) - F(\theta_3,\theta_4)\, | \leq 2. \qquad (26)$$

È facile verificare che la meccanica quantistica viola tale disuguaglianza, in generale.