

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2005-2006

Compito di Fisica b1A (19/01/2006)

1

In un modello molto elementare dell'elettricità atmosferica, la distribuzione di carica in una nuvola durante un temporale è schematizzata come due cariche puntiformi $+Q$ e $-Q$, poste sullo stesso asse verticale rispettivamente ad altezze h_p e h_N . Valori caratteristici sono $Q = 40$ C, $h_n = 5$ km, e $h_p = 10$ km.

Si schematizzi la Terra come un buon conduttore, trascurandone la curvatura.

- Si dia il valore numerico del campo elettrico alla superficie sulla verticale passante per le cariche.
- Si calcoli l'energia elettrostatica della distribuzione di carica.
- Si dia l'espressione del campo elettrico sulla superficie della Terra, mostrando che il campo è nullo ad una certa distanza dalla verticale e si dia l'espressione di tale distanza.

2

È noto che per una particella carica orbitante di massa m e carica q esiste una relazione di proporzionalità tra il momento angolare \mathbf{L} e il momento magnetico \mathbf{m} :

$$\mathbf{m} = \frac{q}{2m} \mathbf{L}. \quad (1)$$

L'additività di \mathbf{m} e \mathbf{L} e il teorema di equivalenza di Ampère permettono di affermare che la (1) vale per ogni sistema meccanico formato da particelle con lo stesso rapporto q/m , che sia dotato di momento magnetico permanente.

- Premesso quanto sopra, si mostri che l'equazione del moto di un corpo dotato di momento magnetico permanente \mathbf{m} in un campo magnetico esterno \mathbf{B} è della forma

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \gamma \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

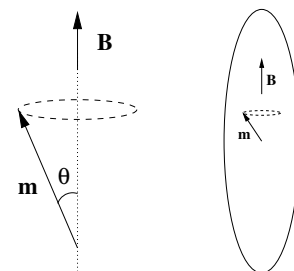
dove γ è una costante da determinare.

Supponiamo di avere un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ diretto lungo l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano, e che, all'istante $t = 0$, un corpo di momento magnetico \mathbf{m} formi un angolo θ con l'asse z e giaccia nel piano xz .

- Si risolva l'equazione del moto (2) per il corpo magnetizzato, mostrando che la soluzione descrive un moto di *precessione* intorno all'asse z , e si calcoli la frequenza di precessione ω_0 .

Si consideri ora il seguente meccanismo schematico per rilevare la precessione. Sempre in presenza di \mathbf{B}_0 , il corpo magnetizzato, supposto puntiforme, è posto nel centro di una spira circolare di raggio R giacente nel piano yz .

- Si calcoli la forza elettromotrice indotta nella spira. (Suggerimento: si sfruttino i principi di mutua induzione e di equivalenza di Ampère).



SOLUZIONI

1

a) Nella schematizzazione proposta la Terra è un piano conduttore infinito. Le condizioni al contorno sono quindi quelle di potenziale elettrostatico nullo alla superficie ($y = 0$). La soluzione del problema si ottiene col metodo delle cariche immagine, ponendo due cariche fittizie $-Q$ e $+Q$ sullo stesso asse, rispettivamente alle posizioni $y = -h_N$ e $y = -h_p$ (cioè sotto la superficie terrestre).

Sommando i contributi di tutte le cariche al campo elettrico nel punto ($\rho = 0, y = 0$) si ha

$$E(\rho = 0, y = 0) = k_0 Q \left(-\frac{1}{h_p^2} + \frac{1}{h_n^2} + \frac{1}{h_n^2} - \frac{1}{h_p^2} \right) = 2k_0 Q \left(\frac{1}{h_n^2} - \frac{1}{h_p^2} \right) \simeq 2.2 \times 10^4 \text{ V/m}.$$

b) Per calcolare l'energia elettrostatica sfruttiamo l'espressione per l'energia potenziale di una coppia di cariche poste nelle posizioni \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 :

$$U(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = k_0 \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}. \quad (3)$$

Se tutte le cariche della configurazione fossero reali, l'energia potenziale sarebbe data dalla somma della (3) su tutte le coppie di cariche. Nel nostro caso l'energia potenziale è la metà di questo valore. Infatti, ricordiamo che l'energia si può anche ottenere in ogni caso dall'integrale di volume, esteso a tutto lo spazio

$$U_{tot} = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV.$$

Consideriamo allora la configurazione S_1 in cui tutte le cariche trovate al punto a) sono sostituite da cariche reali. Per S_1 , l'intensità del campo elettrico in funzione della posizione è simmetrica rispetto al piano $y = 0$, per cui l'integrale esteso solo al semipiano $y > 0$ vale la metà dell'integrale su tutto lo spazio. Ma nel nostro sistema, dove le cariche sono reali solo in $y > 0$, il campo è identico a quello in S_1 nella regione $y > 0$, mentre è identicamente nullo per $y < 0$; quindi l'integrale della densità di energia su tutto lo spazio vale la metà dello stesso integrale in S_1 , ovvero la metà della somma dell'energia di interazione (3) di tutte le cariche in S_1 . Possiamo allora calcolare l'energia del nostro sistema sommando la (3) su tutte le cariche (reali ed immagine) e dividendo per 2:

$$\begin{aligned} U_{tot} &= \frac{1}{2} \left(-2 \times k_0 \frac{Q^2}{h_p - h_n} - k_0 \frac{Q^2}{2h_p} - k_0 \frac{Q^2}{2h_n} + 2 \times k_0 \frac{Q^2}{h_p + h_n} \right) \\ &= -k_0 Q^2 \left(\frac{1}{h_p - h_n} + \frac{1}{4h_p} + \frac{1}{4h_n} + \frac{1}{h_p + h_n} \right). \end{aligned}$$

In pratica, nel sommare sulle coppie di cariche, per una coppia carica reale-carica immagine si deve dividere la (3) per 1/2, mentre non va considerata l'interazione tra cariche immagine.

Essendo $k_0 = 1/4\pi\epsilon_0 \simeq 9 \times 10^9$ unità SI, una stima numerica dà

$$U_{tot} \simeq 3 \times 10^9 \text{ J}.$$

c) Il calcolo si fa abbastanza rapidamente considerando che alla superficie il campo elettrico è perpendicolare ad essa (ovvero è diretto lungo y), per cui basta prendere le componenti dei campi delle

singole cariche in questa direzione. Tenuto conto che, detta \mathbf{r}_i la distanza della i -esima carica (posta a $y = y_i$) dal cerchio di raggio ρ intorno all'asse delle cariche,

$$E_{i,y} = \left(k_0 \frac{q}{r_i^3} \mathbf{r}_i \right) \cdot \hat{\mathbf{y}} = k_0 \frac{q}{(y_i^2 + \rho^2)^{3/2}} y_i.$$

Possiamo quindi sommare tutti i contributi, tenendo conto che ogni carica reale dà lo stesso contributo della propria immagine: otteniamo allora

$$E_y(\rho) = -2k_0Q \frac{h_p}{(h_p^2 + \rho^2)^{3/2}} + 2k_0Q \frac{h_n}{(h_n^2 + \rho^2)^{3/2}}.$$

Posto $E_y(\rho) = 0$ otteniamo l'equazione

$$\frac{\rho^2 + h_p^2}{h_p^{2/3}} = \frac{\rho^2 + h_n^2}{h_n^{2/3}},$$

da cui, con semplici passaggi otteniamo la soluzione

$$\rho = (h_p h_n)^{1/3} (h_p^{2/3} + h_n^{2/3})^{1/2} \simeq 28 \text{ km}.$$

2

a) Dalla meccanica sappiamo che per la II equazione cardinale della dinamica dei sistemi

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N},$$

dove \mathbf{N} è il momento delle forze. Poiché agiscono solo forze magnetiche

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

da cui si ottiene

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

ovvero

$$\frac{d\mathbf{m}}{dt} = \frac{q}{2m} \mathbf{m} \times \mathbf{B},$$

quindi $\gamma = q/2m$.

b) L'equazione (2) ha la stessa forma dell'equazione per la velocità di una carica in un campo magnetico, per cui ci aspettiamo che la componente m_z sia costante, mentre la componente nel piano xy ruota con frequenza angolare $\omega_0 = \gamma B_0$; questo è, per l'appunto, un moto di precessione.

Ritroviamo questi risultati proiettando la (2) lungo gli assi:

$$\frac{dm_x}{dt} = \gamma B_0 m_y, \quad \frac{dm_y}{dt} = -\gamma B_0 m_x, \quad \frac{dm_z}{dt} = 0.$$

Poniamo $m_{\parallel} = m \cos \theta$ e $m_{\perp} = m \sin \theta$. Otteniamo subito $m_z = m_z(0) = m_{\parallel}$. Per le componenti x e y , derivando ancora rispetto a t e sostituendo si ottiene

$$\frac{d^2 m_x}{dt^2} = \gamma B_0 \frac{dm_y}{dt} = -(\gamma B_0)^2 m_x, \quad \frac{d^2 m_y}{dt^2} = -\gamma B_0 \frac{dm_x}{dt} = -(\gamma B_0)^2 m_y,$$

ovvero due note equazioni di oscillatore armonico. La soluzione è

$$m_x = m_{\perp} \cos \omega_0 t, \quad m_y = m_{\perp} \sin \omega_0 t,$$

avendo posto $\omega_0 = \gamma B_0$.

c) Possiamo sostituire il dipolo magnetico puntiforme \mathbf{m} con una spira di piccolo raggio a e percorsa dalla corrente costante I_a , orientata in modo che $\mathbf{m} = \pi a^2 I_a \hat{\mathbf{n}}$ dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla spira.

Se nella spira di raggio R scorre una corrente I_R , il campo magnetico generato al suo centro è $\mathbf{B}_R = (\mu_0 I_R / 2R) \hat{\mathbf{x}}$. Quindi, il flusso di tale campo magnetico attraverso la spira equivalente di raggio $a \ll R$ è dato da

$$\Phi_1 \simeq \pi a^2 \mathbf{B}_R \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mu_0 \pi \frac{a^2}{2R} I_R \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mu_0 \pi \frac{a^2}{2R} I_R \sin \theta \cos \phi \equiv MI,$$

dove M è il coefficiente di mutua induzione, e ϕ è l'angolo polare di \mathbf{m} attorno all'asse z con $\phi = 0$ quando \mathbf{m} giace nel piano xz . Quindi, il flusso generato dalla spira equivalente attraverso la spira di raggio R è

$$\Phi_2 = MI_a = \pi a^2 I_a \frac{\mu_0}{2R} \hat{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mu_0}{2R} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{m}.$$

Usando la soluzione del punto b) si ha

$$\hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{m} = m \sin \theta \cos \phi = m_{\perp} \cos \omega_0 t,$$

da cui $\Phi_2 = (\mu_0 / 2R) m_{\perp} \cos \omega_0 t$. La forza elettromotrice indotta è

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -\frac{\mu_0 \omega_0}{2R} m_{\perp} \sin \omega_0 t.$$