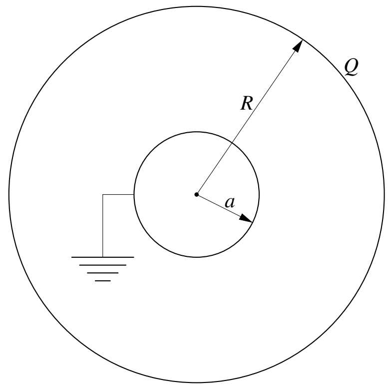
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2007-2008

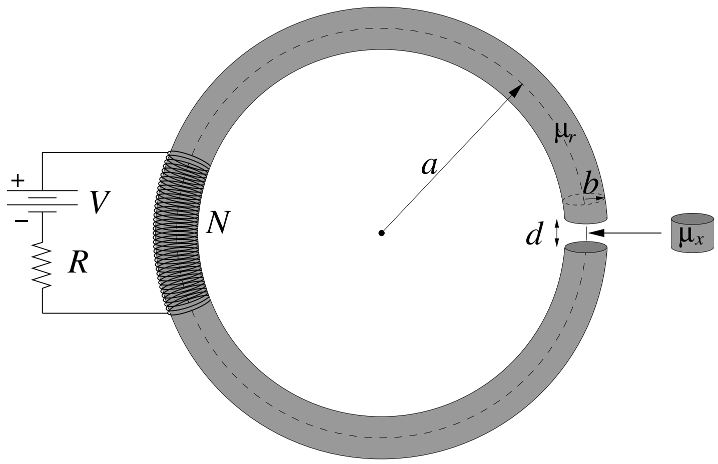
Compito di Fisica B1 (17/01/2008)

1



Una carica Q è distribuita uniformemente in un guscio sferico di raggio R e spessore trascurabile. Una sfera conduttrice, posta a terra (ovvero mantenuta a potenziale zero), di raggio $a < R$ è concentrica al guscio.
a) Calcolare la carica totale indotta sulla sfera conduttrice, il potenziale ed il campo elettrico in tutto lo spazio.
b) Calcolare la pressione elettrostatica sul guscio.
c) Supponendo che il guscio si espanda all'infinito sotto l'azione delle forze elettrostatiche, calcolare il lavoro totale compiuto da queste.

2



Un dispositivo per il riconoscimento di monete metalliche può essere schematizzato come un elettromagnete composto da un materiale di permeabilità relativa $\mu_r \gg 1$, con forma di toro di raggio a, avente sezione circolare di raggio $b \ll a$ ed un traferro di spessore $d \ll a$ (la quantità $a/(d\mu_r)$ *non* è da considerarsi trascurabile). Sull'elettromagnete sono avvolte N spire e il circuito dell'avvolgimento è chiuso su un generatore di tensione V e una resistenza R.
a) Assumendo che nell'avvolgimento passi una corrente continua I, calcolare i valori dei campi B e H nel materiale e nel traferro.
Si inserisce nel traferro una moneta di spessore circa uguale a d, composta da un materiale di permeabilità magnetica relativa μ_x.
b) Si ripetano i calcoli del punto precedente per questa nuova configurazione.
c) Si calcoli il coefficiente di autoinduzione L del circuito in funzione di μ_x.
d) Si supponga che il circuito sia inizialmente sconnesso e il contatto venga chiuso instantaneamente a $t = 0$; si calcoli la legge temporale e il tempo caratteristico con cui la corrente raggiunge il valore di regime.
e) (*facoltativo*) Se il generatore di tensione continua è sostituito da uno di tensione alternata $V(t) = V_0 \cos \omega t$, si calcoli l'intensità di corrente a regime in funzione della permeabilità μ_x.

SOLUZIONI

1

a) Per simmetria la carica indotta sulla sfera (che indichiamo con Q_s) sarà distribuita uniformemente con densità $\sigma_s = Q_s/4\pi a^2$. Campo e potenziale ad una distanza r dal centro saranno uguali a quelli prodotti da una carica puntiforme posta nell'origine e di valore uguale a quella contenuta nella sfera di raggio r. Otteniamo quindi per il potenziale

$$\begin{aligned} V(r) &= 0 \qquad (r < a), \\ &= k_0 \frac{Q_s}{r} + C \qquad (a < r < R), \\ &= k_0 \frac{Q_s + Q}{r} \qquad (r > R). \end{aligned} \tag{1}$$

Le condizioni che determinano Q_s e C sono $V(a) = 0$ (la sfera conduttrice è posta a terra, cioè mantenuta allo stesso potenziale nullo dell'infinito) e la continuità di V in $r = R$, cioè $V(R^-) = V(R^+)$. Si ottiene allora

$$Q_s = -\frac{a}{R} Q, \qquad C = -k_0 \frac{Q_s}{a} = k_0 \frac{Q}{R}. \tag{2}$$

Le espressioni finali di potenziale e campo sono quindi

$$V(r) = -k_0 \frac{Q}{r}\frac{a}{R} + k_0 \frac{Q}{R} \qquad (a < r < R), \tag{3}$$

$$= +k_0 \frac{Q}{r}\left(1 - \frac{a}{R}\right) \qquad (r > R), \tag{4}$$

$$E(r) = -k_0 \frac{Q}{r^2}\frac{a}{R} \qquad (a < r < R), \tag{5}$$

$$= +k_0 \frac{Q}{r^2}\left(1 - \frac{a}{R}\right) \qquad (r > R). \tag{6}$$

Per una via più laboriosa al risultato si può utilizzare il metodo delle cariche immagine. Preso un elemento infinitesimo di carica del guscio $dq = \sigma dS$, dove $\sigma = Q/4\pi R^2$, questo ha come immagine una carica $dq' = -(a/R)dq$ a distanza $R' = a^2/R$ dal centro. L'immagine del guscio è quindi un guscio di raggio R' e densità superficiale di carica σ' tale che $\sigma' dS' = dq' = -(a/R)\sigma dS$. Essendo $dS/dS' = (R/R')^2$, si ottiene $\sigma' = -(R/a)^3\sigma$. La carica indotta totale è $Q_s = \pi R'^2 \sigma' = -Q(a/R)$ e da qui si procede a calcolare campo e potenziale come sopra.

b) La pressione elettrostatica si può calcolare direttamente come il prodotto della densità superficiale di carica per il campo "medio" sullo strato:

$$\begin{aligned} P_{es} &= \sigma \bar{E} = \epsilon_0 \left[E(R^+) - E(R^-)\right] \times \frac{1}{2}\left[E(R^+) + E(R^-)\right] \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}\left[E^2(R^+) - E^2(R^-)\right] = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0}\frac{Q^2}{R^4}\left(1 - \frac{2a}{R}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Allo stesso risultato si arriva calcolando l'energia elettrostatica U_{es} e derivandola rispetto al raggio del guscio, ottenedo la forza totale che va divisa per la superficie totale:

$$P_{es} = \frac{F}{S} = \frac{1}{4\pi R^2}\left(-\frac{\partial U_{es}}{\partial R}\right), \tag{8}$$

$$
\begin{aligned}
U_{es} &= \frac{e0}{2}\int \mathbf{E}^2 dV = \frac{e0}{2}(k_0 Q)^2\left[\int_a^R \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \left(1-\frac{a}{R}\right)^2 \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr\right] \\
&= \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}\left(1-\frac{a}{R}\right). \qquad (9)
\end{aligned}
$$

c) Il lavoro è dato dell'integrale della forza sullo spostamento totale

$$
W = \int_R^\infty F(R')dR' = \int_R^\infty 4\pi R'^2 P_{es}(R')dR' = \frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{Q^2}{R}\left(1-\frac{a}{R}\right). \qquad (10)
$$

che è uguale all'energia elettrostatica iniziale.

2

a) Si sfruttano le proprietà dei circuiti magnetici

$$
\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_c, \qquad \Phi(B) = \text{cost.} \qquad (11)
$$

Poiché $b \ll a$ e la sezione è costante si può assumere che B sia uniforme lungo il materiale.[1] Inoltre $B = \mu_r\mu_0 H$ è continuo alle superfici che delimitano il traferro. Si ha quindi per la circuitazione di H

$$
\oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = H_m(2\pi a - d) + H_t d = \mu_0^{-1} B[\mu_r{}^{-1}(2\pi a - d) + d] = NI, \qquad (12)
$$

da cui si ricava il campo B:

$$
B = \frac{NI}{\mu_0^{-1}[\mu_r{}^{-1}(2\pi a - d) + d]}. \qquad (13)
$$

b) Il punto precedente va modificato sostituendo per la permeabilità nel traferro il valore $\mu_x\mu_0$ a μ_0. Quindi

$$
B = \frac{NI}{\mu_0^{-1}[\mu_r{}^{-1}(2\pi a - d) + \mu_x{}^{-1} d]}. \qquad (14)
$$

c) Poiché si ha $\Phi(B) = \pi b^2 B =$ cost. lungo il circuito magnetico, il flusso totale attraverso l'avvolgimento è $\Phi_{tot} = N\Phi(B) = \pi b^2 N B$. Si ha quindi

$$
L = \frac{\Phi_{tot}}{I} = \frac{\pi b^2 N^2}{\mu_0^{-1}[\mu_r{}^{-1}(2\pi a - d) + \mu_x{}^{-1} d]}. \qquad (15)
$$

d) L'equazione del circuito per $I = I(t)$ con la condizione iniziale $I(0) = 0$ è

$$
RI + L\frac{dI}{dt} = V, \qquad (16)
$$

la cui soluzione è

$$
I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-t/\tau}), \qquad \tau = \frac{L}{R}. \qquad (17)
$$

[1] Più esattamente questo è vero nella parte di circuito sufficientemente lontana dall'avvolgimento.

e) L'equazione è adesso

$$RI + L\frac{dI}{dt} = V_0 \cos \omega t, \tag{18}$$

e cercando una soluzione del tipo $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$, sostituendo si trova

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \qquad \phi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right). \tag{19}$$