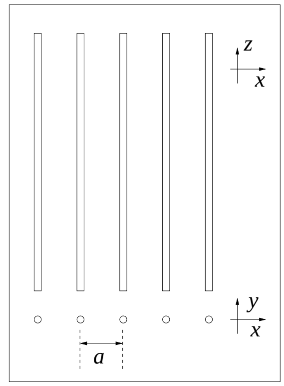
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2008-2009

Compito di Fisica B1 (20/01/2009)

1



Si consideri una griglia periodica formata da fili paralleli cilindrici di lunghezza infinita e diametro trascurabile, disposti sul piano $y = 0$ parallelamente all'asse z, uniformemente spaziati lungo x di una distanza a. Sui fili si trova una densità lineare uniforme di carica λ.
Determinare approssimativamente il campo elettrico ed il potenziale
a) lontano dalla griglia, cioè a distanze $|y| \gg a$,
b) in prossimità dei fili, cioè a distanze $r \ll a$ dal singolo filo.
c) Si dimostri ora che l'espressione *esatta* del potenziale è

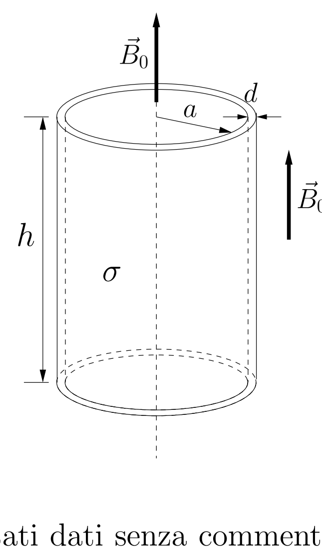
$$V(x, y) = -C \log\left[2 \left(\cosh ky - \cos kx\right)\right], \qquad (1)$$

seguendo questi passi: i) si verifichi direttamente che la (1) è una soluzione dell'equazione di Laplace $\nabla^2 V = 0$; ii) si determini k dalla simmetria del problema; iii) si determini C dalla condizione al contorno al limite per grandi distanze dalla griglia; iv) si controlli in fine che i valori trovati di k e C danno il potenziale corretto anche in prossimità dei fili. Si ricordi che

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x,\ \frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x,\ \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

2



Si consideri una lamina metallica a forma di lungo cilindro avente altezza h, raggio $a \ll h$, spessore $d \ll a$ e conducibilità σ. La lamina si trova immersa in un campo magnetico esterno $\mathbf{B}_0(t)$ parallelo all'asse del cilindro. Per $t > 0$ il campo esterno varia nel tempo secondo la legge $\mathbf{B_0}(t) = \mathbf{B_0} e^{-t/\tau}$.
Calcolare:
a) il campo elettrico indotto $\mathbf{E}(r, t)$ (si assuma l'asse del cilindro come asse di simmetria del sistema, r è la distanza dall'asse stesso),
b) la corrente $\mathbf{J}$ nella lamina e il campo magnetico $\mathbf{B}_1(t)$ indotto da essa.
c) Si ricalcoli il campo elettrico indotto nella lamina $\mathbf{E}(a, t)$, tenendo conto anche della presenza di $\mathbf{B}_1(t)$, cioè dell'autoinduzione della lamina.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) A distanze $|y| \gg a$ la griglia si comporta come una lamina di densità di carica superficiale $\sigma = \lambda/a$, quindi avremo

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\lambda}{2a\varepsilon_0}, \qquad \text{e, ponendo } V = 0 \text{ per } y = 0, \qquad V = -E|y| = -\frac{\lambda}{2a\varepsilon_0}|y| \tag{2}$$

b) Molto vicino al singolo filo, può essere trascurato il contributo degli altri fili, quindi

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}, \qquad V = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(\frac{r}{r_0}\right), \tag{3}$$

Dove r è la distanza dal filo considerato e r_0 è una costante arbitaria. Se poniamo $x = 0$ per uno dei fili della griglia, in prossimità dell'n-esimo filo avremo $r = \sqrt{\xi^2 + y^2}$, con $\xi = x - na$.
c) Dalla (1) abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= -C\,\frac{2k\sin kx}{2(\cosh ky - \cos kx)} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -C\,\frac{k^2\cos kx\cosh ky - k^2\cos^2 kx - k^2\sin^2 kx}{(\cosh ky - \cos kx)^2} = -C\,\frac{k^2\cos kx\cosh ky - k^2}{(\cosh ky - \cos kx)^2} &\quad (4)\\
\frac{\partial V}{\partial y} &= -C\,\frac{2k\sinh ky}{2(\cosh ky - \cos kx)} \\
\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -C\,\frac{k^2\cosh^2 kx - k^2\cosh ky\cos 2kx - k^2\sinh^2 ky}{(\cosh ky - \cos kx)^2} = C\,\frac{k^2\cos kx\cosh ky - k^2}{(\cosh ky - \cos kx)^2} &\quad (5)
\end{aligned}$$

da cui segue $\partial^2 V/\partial x^2 + \partial^2 V/\partial y^2 = 0$. Dalla periodicità della griglia si ricava $k = 2\pi/a$. Al limite $|y| \to \infty$ abbiamo $\cosh ky \to e^{k|y|}/2$, rispetto a cui $\cos kx$ è trascurabile. Quindi

$$\lim_{|y|\to\infty} V(x,y) = -Ck|y|, \qquad \text{dalle (2) segue} \qquad C = \frac{E}{k} = \frac{\lambda}{2a\varepsilon_0}\frac{a}{2\pi} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \tag{6}$$

Controlliamo adesso che cosa succede per $x \to 0, y \to 0$. Abbiamo

$$\lim_{x\to 0}\cos kx = 1 - \frac{k^2x^2}{2}, \qquad \lim_{y\to 0}\cosh ky = 1 + \frac{k^2y^2}{2},$$

quindi

$$\lim_{x,y\to 0} V(x,y) = -C\log(k^2r^2) = -2C\log(kr) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\left(r\frac{2\pi}{a}\right), \tag{7}$$

che coincide con la (3) se poniamo la costante arbitraria $r_0 = 1/k = a/(2\pi)$.

2

a) Per simmetria $\mathbf{E}$ è solo azimutale e ha solo linee di forza circolari. Calcolando la circuitazione di $\mathbf{E}$ su queste ultime otteniamo dalla legge di Faraday-Neumann

$$2\pi rE = -\pi r^2\partial_t B_0(t), \qquad E = E(r,t) = \frac{rB_0}{2\tau}e^{-t/\tau}. \tag{8}$$

b) All'interno del metallo si ha $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$. Poiché la lamina è sottile possiamo trascurare la variazione di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{J}$ al suo interno. Quindi abbiamo una corrente superficiale $\iota = Jd = \sigma E(a,t)d$ che produce un campo magnetico equivalente a quello di un solenoide con $\iota = nI$:

$$B_1 = B_1(t) = \mu_0\iota = \mu_0 Jd = \mu\sigma E(a,t)d = \frac{\mu_0\sigma a d B_0}{2\tau}e^{-t/\tau}. \tag{9}$$

c) Applichiamo nuovamente la legge di Faraday-Neumann tenendo conto di $B_1 = \mu_0\sigma E(a,t)d$:

$$2\pi a E(a,t) = -\frac{\pi a^2}{2}\partial_t[B_0(t) + B_1(t)] = \frac{\pi a^2}{2}\left[\frac{B_0}{\tau}e^{-t/\tau} - \mu_0\sigma d\partial_t E(a,t)\right]. \tag{10}$$

Facendo l'ipotesi che continui ad essere $E(r,t) = E(r)e^{-t/\tau}$ otteniamo

$$2\pi a E(a) = \frac{\pi a^2}{2}\frac{B_0}{\tau} + \frac{\pi a^2}{2}\frac{\mu_0\sigma d}{\tau}E(a), \tag{11}$$

da cui si ricava

$$E(a) = \frac{aB_0/2\tau}{1 - \mu_0\sigma a d/\tau} = \frac{aB_0/2\tau}{1 - \sigma a d/\epsilon_0 c^2\tau}. \tag{12}$$