Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Compito di Fisica B1 (20/01/2010)

1

Un condensatore sferico è riempito per metà (rispetto al piano equatoriale, come in Fig.1S) con un materiale di permittività dielettrica relativa ε_r. Siano a e $b > a$ i raggi delle armature conduttrici interna ed esterna e $\pm Q$ le rispettive cariche libere totali presenti su di esse.

Calcolare

a) le distribuzioni di carica libera sulle superfici delle armature,

b) il campo elettrico all'interno del condensatore,

c) la capacità del condensatore.

d) Si risponda di nuovo alle domande precedenti nel caso in cui il dielettrico riempia la regione $r > (a+b)/2$ all'interno del condensatore, come in Fig.1D.

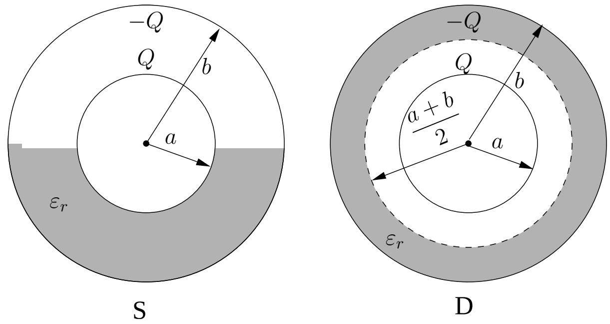

Figura 1: Condensatore sferico.

2

Una lamina metallica di forma cilindrica ha raggio a, spessore $\delta \ll a$ e altezza $h \gg a$. Sia σ la conducibilità del metallo. La lamina si trova in un campo magnetico esterno uniforme e oscillante $\mathbf{B}_0 \cos \omega t$ parallelo al suo asse. (Si assuma che il campo magnetico abbia la stessa simmetria cilindrica della lamina e quindi che gli assi di simmetria coincidano.)

Calcolare

a) il campo elettrico $\mathbf{E}$ e la densità di corrente $\mathbf{J}$ nella lamina,

b) la potenza dissipata per effetto Joule nella lamina,

c) la pressione sulla lamina dovuta al campo magnetico (suggerimento: mostrare preliminarmente dall'espressione della forza di Lorentz e della definizione di $\mathbf{J}$ che la forza su un volumetto infinitesimo $\Delta\tau$ dove è presente $\mathbf{J}$ è data da $d\mathbf{f} = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})d\tau$),

d) il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ prodotto all'interno della lamina dalla densità di corrente $\mathbf{J}$, discutendo per quali valori della frequenza ω si ha $\mathbf{B}_1 \ll \mathbf{B}_0$ ovvero il campo indotto è trascurabile rispetto al campo esterno.

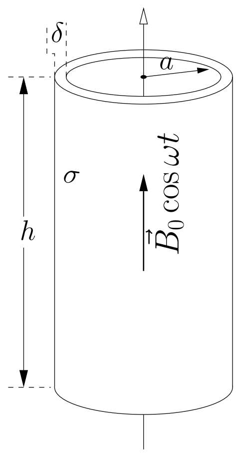

Figura 2: Lamina cilindrica.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell nel vuoto ($\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \qquad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$$

Definizione della permittività dielettrica $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, del vettore $\mathbf{D}$ e della relazione con la densità di carica libera

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\mathrm{lib}} \tag{1}$$

Definizione di capacità (Q carica, V differenza di potenziale)

$$C \equiv Q/V$$

Campo magnetico all'interno di un solenoide infinito vuoto avente n spire per unità di lunghezza con intensità di corrente I

$$|\mathbf{B}| = \mu_0 n I$$

Potenza dissipata per unità di volume in un mezzo dove scorre la densità di corrente $\mathbf{J}$ in presenza di un campo elettrico $\mathbf{E}$

$$w_d = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$$

SOLUZIONI

1

a) Il campo elettrico $\vec{E}$ all'interno del guscio sferico è radiale. Quindi la sua componente parallela alla superficie di separazione dielettrico-vuoto, che deve essere continua, coincide con tutto il campo. Alla superficie della sfera di raggio a, indicando con $\sigma_v^{(a)}$ la densità superficiale di carica libera che si affaccia sul vuoto, e con $\sigma_d^{(a)}$ la densità superficiale che si affaccia sul dielettrico, abbiamo

$$E_v = \frac{\sigma_v^{(a)}}{\varepsilon_0}, \quad \text{e} \quad E_d = \frac{\sigma_d^{(a)}}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}, \quad \text{e da} \quad E_v = E_d \quad \text{segue} \quad \sigma_d^{(a)} = \varepsilon_r \sigma_v^{(a)}. \tag{2}$$

Abbiamo poi $Q = 2\pi a^2 \sigma_v^{(a)} + 2\pi a^2 \sigma_d^{(a)}$, da cui otteniamo

$$\sigma_v^{(a)} = \frac{Q}{2\pi a^2(1+\varepsilon_r)}, \quad \sigma_d^{(a)} = \frac{\varepsilon_r Q}{2\pi a^2(1+\varepsilon_r)}. \tag{3}$$

Analogamente, per la distribuzione di carica libera sulla superficie interna della sfera di raggio b avremo

$$\sigma_r^{(b)} = -\frac{Q}{2\pi b^2(1+\varepsilon_r)}, \quad \sigma_d^{(b)} = -\frac{\varepsilon_r Q}{2\pi b^2(1+\varepsilon_r)}\,. \tag{4}$$

b) Dalla (2) abbiamo che il campo elettrico alla superficie di raggio a vale

$$E_v(a) = E_d(a) = E(a) = \frac{Q}{2(1+\varepsilon_r)\pi\varepsilon_0\, a^2} \tag{5}$$

quindi all'interno del guscio varrà

$$E = \frac{Q}{2(1+\varepsilon_r)\pi\varepsilon_0\, r^2}, \tag{6}$$

dove r è la distanza dal centro comune delle due sfere.

c) Il condensatore è equivalente a due condensatori semisferici in parallelo di capacità rispettivamente

$$C_v = 2\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad \text{e} \quad C_d = 2\pi\varepsilon_0\, \varepsilon_r \frac{ab}{b-a}, \quad \text{quindi} \quad C = C_v + C_d = 2\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)\frac{ab}{b-a}. \tag{7}$$

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando direttamente

$$V = -\int_a^b E(r)dr = \frac{Q}{2(1+\varepsilon_r)}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) \equiv \frac{Q}{C}. \tag{8}$$

d) In questo caso la distribuzione di carica libera sulle due superfici è uniforme, quindi abbiamo $\sigma^{(a)} = Q/(4\pi a^2)$ e $\sigma^{(b)} = -Q/(4\pi b^2)$. Il campo elettrico sarà sempre radiale, con una discontinuità per $r = (a+b)/2$, dovendo qui essere continua la componente perpendicolare di $\vec{D}$, quindi $\vec{D}$. D varrà su tutto il guscio

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad \text{quindi} \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} \quad \text{per} \quad a < r < \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, r^2} \quad \text{per} \quad \frac{a+b}{2} < r < b. \tag{9}$$

Adesso il condensatore è equivalente a due condensatori sferici in serie, di capacità rispettivamente

$$C_v = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-a} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{a^2+ab}{b-a}, \quad \text{e} \quad C_d = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{b\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}{b-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)} = 4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_r \frac{ab+b^2}{b-a}. \tag{10}$$

La capacità complessiva sarà

$$C = \frac{C_v C_d}{C_v + C_d} = 4\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_r \frac{(a^2+ab)(b^2+ab)}{(b-a)[\varepsilon_r(b^2+ab)+a^2+ab]} = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{ab(a+b)}{(b-a)(\varepsilon_r b + a)}\ . \tag{11}$$

Anche in questo caso si poteva procedere calcolando

$$V = -\int_a^b E(r)dr = \int_a^{(a+b)/2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}dr + \int_{(a+b)/2}^b \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r\, r^2}dr = \ldots \equiv \frac{Q}{C}. \tag{12}$$

2

a) Se consideriamo un percorso circolare perpendicolare a $\vec{B}$ all'interno della lamina abbiamo per la forza elettromotrice

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \pi a^2 B_0\,\omega \sin\omega t, \tag{13}$$

da cui

$$E = \frac{\mathcal{E}}{2\pi a} = \frac{1}{2}\omega a B_0 \sin\omega t, \quad J = \sigma E = \frac{1}{2}\sigma\omega B_0 a \sin\omega t, \tag{14}$$

con $\vec{E}$ e $\vec{J}$ azimutali.

b) La potenza dissipata per unità di volume vale

$$w = \vec{E}\cdot\vec{J} = \sigma\frac{1}{4}\omega^2 B_0^2 a^2 \sin^2\omega t, \tag{15}$$

quindi la potenza totale dissipata è

$$W = \frac{\pi}{2} h\delta\sigma\omega^2 B_0^2 a^3 \sin^2\omega t, \tag{16}$$

essendo $2\pi ah\delta$ il volume del metallo in cui avviene la dissipazione.

c) La pressione sarà

$$p = \delta\,|\vec{J}\times\vec{B}| = \frac{1}{2}\delta\,\sigma\omega B_0^2 a \sin\omega t\cos\omega t. \tag{17}$$

d) La lamina è equivalente ad un solenoide con $nI = J\delta$, quindi

$$B_1 = \mu_0 J\delta = \mu_0\,\sigma\,\delta\,\frac{1}{2}\omega B_0 a \sin\omega t. \tag{18}$$

La condizione $|B_1| \ll |B_0|$ può essere scritta come

$$\omega \ll \frac{2c^2\tau}{a\delta} \quad \text{dove} \quad \tau = \frac{\varepsilon_0}{\sigma} = (\mu_0\sigma c^2)^{-1} \tag{19}$$

è il tempo di rilassamento del metallo.