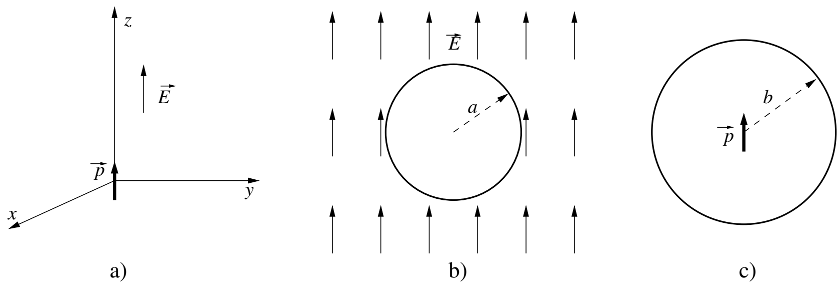
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2005-2006

Compito di Fisica b1A (09/02/2006)

1



Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$, posto nell'origine degli assi di un riferimento cartesiano, si trova in presenza di un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}$, parallelo a $\mathbf{p}$.

a) Si scriva il potenziale elettrostatico totale $V = V(\mathbf{r})$, mostrando che la superficie equipotenziale $V = 0$ è una sfera, della quale si chiede il raggio R.

Si usi ora il risultato del punto a) per trovare il potenziale elettrico in tutto lo spazio nei due casi seguenti:

b) una sfera conduttrice di raggio a è posta in un campo elettrico uniforme $\mathbf{E}_0$;

c) un dipolo $\mathbf{p}_0$ è posto nel centro di un guscio conduttore di raggio b.

d) Si trovi ora la soluzione del problema c) attraverso il metodo delle cariche immagine.

2

Una sferetta diamagnetica ha polarizzabilità magnetica α (ovvero, posta in un campo magnetico $\mathbf{B}$ assume un momento di dipolo magnetico $\mathbf{m} = \alpha\mathbf{B}$) con $\alpha < 0$.

Si pone la sferetta (di massa m) sull'asse di una spira di raggio a, nella quale scorre la corrente costante I, a distanza z da essa, nel campo di gravità $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$.

Si vuole cercare una condizione d'equilibrio per la sferetta, nella quale la forza magnetica bilancia la forza di gravità, assumendo $z \gg a \gg r_s$, dove r_s è il raggio della sferetta diamagnetica.

A tal fine si seguano i seguenti passi:

a) Assunta come nota la componente parallela del campo magnetico della spira sul suo asse

$$B_z(\rho = 0, z) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \qquad (z \gg a)\,,$$

si calcoli il campo magnetico radiale $B_\rho(\rho, z)$ in prossimità dell'asse.

b) Si scriva l'energia potenziale della sferetta $U = U(\rho, z)$.

c) Si calcolino la forza longitudinale (F_z) e la forza radiale (F_ρ) sulla sferetta e si cerchi un punto d'equilibrio ($\rho = 0, z_0$). Si calcoli inoltre la frequenza delle piccole oscillazioni radiali intorno all'equilibrio.

SOLUZIONI

1

a) Supponiamo, per fissare le idee, che $\mathbf{p}$ ed $\mathbf{E}$ siano orientati lungo z. Il potenziale elettrico è la somma del potenziale del dipolo più del potenziale corrispondente ad un campo elettrico costante,

$$V(\mathbf{x}) = k_0 \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} - Ez = k_0 \frac{p\cos\theta}{r^2} - Er\cos\theta\,,$$

dove $k_0 = 1/4\pi\epsilon_0$ e θ è l'angolo tra $\mathbf{r}$ e l'asse z. La superficie a $V = 0$ è quindi definita da

$$k_0 \frac{p\cos\theta}{r^2} - Er\cos\theta = 0\,,$$

ed è quindi una sfera di raggio

$$r = \left(\frac{k_0 p}{E}\right)^{1/3} \equiv R\,. \tag{1}$$

b) Dobbiamo trovare una soluzione per il potenziale V che soddisfi $V = 0$ sulla superficie del conduttore, ovvero $V(|\mathbf{r}| = a) = 0$, e tale che a grande distanza il campo sia $\mathbf{E}_0$. Dal punto a) otteniamo che tale soluzione si ottiene supponendo che il campo generato dalle cariche di superficie sulla sfera sia quello di un dipolo $\mathbf{p}_i$ parallelo a $\mathbf{E}_0$, e di modulo definito dalla (1) per $E = E_0$ e $R = a$. Troviamo allora

$$\mathbf{p}_i = \frac{a^3}{k_0}\mathbf{E}_0 = 4\pi\epsilon_0 a^3 \mathbf{E}_0 = 3\epsilon_0 \mathcal{V}_a \mathbf{E}_0\,,$$

dove $\mathcal{V}_a$ è il volume della sfera. Il potenziale per $r > a$ è quindi dato da

$$V = k_0 \frac{\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{r}}{r^3} - E_0 z\,, \tag{2}$$

mentre $V = 0$ per $r < a$. Notare che la carica indotta sulla sfera è nulla e quindi la soluzione è la stessa per una sfera isolata e scarica o per una sfera messa a terra, cioè mantenuta a potenziale nullo.
c) In questo caso la condizione al contorno $V = 0$ è a $r = b$. Le cariche di polarizzazione sulla superficie interna generano quindi un campo uniforme $\mathbf{E}_i$ parallelo a $\mathbf{p}_0$ e di modulo dato dalla (1) per $p = p_0$ e $r = b$:

$$\mathbf{E}_i = \frac{k_0}{b^3}\mathbf{p}_0 = \frac{\mathbf{p}_0}{3\epsilon_0 \mathcal{V}_b}\,.$$

Come la caso precedente, la carica indotta è nulla e quindi è indifferente se il guscio è scarico e isolato o messo a terra.
d) Schematizziamo il dipolo come due cariche $\pm q$ poste a $z = \pm d/2$. Dal noto problema del guscio conduttore in presenza di una carica puntiforme, sappiamo che una carica Q posta a distanza z dal centro induce una distribuzione di cariche equivalenti ad una carica immagine $Q' = -Qb/z$ posta a $z' = b^2/z$. Il campo all'interno del guscio è quindi quello dovuto alle due cariche reali più due cariche immagine di valore $\mp 2qb/d$ poste rispettivamente a distanza $\pm z = \pm 2b^2/d$.

Passando al limite $d \to 0$ ma $qd \to p$, il campo delle cariche reali diviene esattamente quello di un dipolo $\mathbf{p} = p\hat{\mathbf{z}}$ posto nell'origine, mentre quello delle cariche immagine è un campo uniforme. Per brevità consideriamo solo il valore del campo delle cariche immagine al centro della sfera:

$$E_c = 2 \times k_0 \frac{2qb/d}{(2b^2/d)^2} = k_0 \frac{qd}{b^3} = k_0 \frac{p}{b^3}\,,$$

che coincide col valore trovato al punto c). Ovviamente un metodo simile può essere usato anche per ritrovare il risultato del punto a).

2

a) Per simmetria si ha $\mathbf{B} = B_z(\rho,z)\hat{\mathbf{z}} + B_\rho(\rho,z)\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Utilizzando la condizione sulla divergenza in coordinate cilindriche

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho B_\rho) + \partial_z B_z = 0\,,$$

otteniamo

$$\partial_\rho(\rho B_\rho) = -\frac{\rho}{2}\partial_z B_z\,.$$

In prossimità dell'asse possiamo porre $B_z(\rho,z) \simeq B_z(0,z)$. Otteniamo quindi

$$B_\rho(\rho,z) \simeq -\frac{\rho}{2}\partial_z B_z(0,z) \simeq \frac{3\rho}{2z}B_z(0,z)\,.$$

Allo stesso risultato si arriva considerando il teorema di Gauss per una piccola superficie cilindrica di raggio ρ ed altezza h intorno all'asse z:

$$\Phi(\mathbf{B}) \simeq \pi\rho^2[B_z(z+h) - B_z(z)] + 2\pi\rho h B_\rho(\rho) = 0$$

da cui, posto $B_z(z+h) - B_z(z) \simeq h\partial_z B_z$, si ricava il risultato precedente.

b) L'energia di interazione col campo magnetico della sferetta è

$$U_m = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} = -(-\alpha\mathbf{B})\cdot\mathbf{B} = \alpha B^2 \simeq \alpha\frac{(\mu_0 I a^2/2)^2}{z^6}\left(1 + \frac{9\rho^2}{4z^2}\right)\,.$$

L'energia potenziale è la somma di U_m e dell'energia potenziale gravitazionale:

$$U(\rho,z) = U_m(\rho,z) - mgz\,.$$

c) La forza assiale in $\rho = 0$ è data da

$$F_z(0,z) = -\partial_z U|_{\rho=0} = -mg - \frac{6\alpha}{z^7}(\mu_0 I a^2/2)^2\,,$$

che si annulla nel punto (ricordare che $\alpha < 0$)

$$z_0 = \left(\frac{6|\alpha|}{mg}\right)^{1/7}(\mu_0 I a^2/2)^{2/7}\,.$$

La forza radiale vicino all'asse è data da

$$F_\rho(\rho,z) = -\partial_\rho U = \frac{9\alpha\rho}{2z^8}(\mu_0 I a^2/2)^2\,,$$

ed è quindi sempre nulla per $\rho = 0$. Quindi $(z_0, 0)$ è un punto di equilibrio.

La forza radiale è una forza armonica di costante elastica

$$k = \frac{9\alpha}{2z_0^8}(\mu_0 I a^2/2)^2\,,$$

quindi le piccole oscillazioni radiali hanno frequenza $\omega = \sqrt{k/m}$.