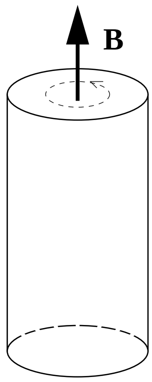
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2007-2008

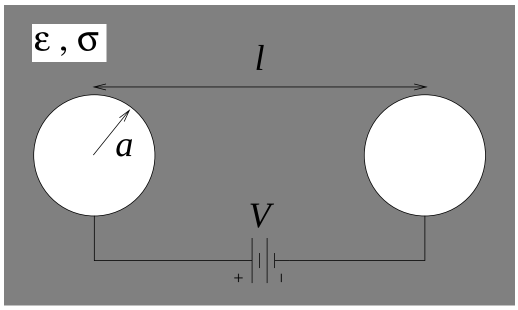
Compito di Fisica B1 (07/02/2008)

1



Un cilindro conduttore di raggio a e altezza $h \gg a$ è mantenuto in rotazione intorno al proprio asse con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, in presenza di un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B}$ parallelo a $\boldsymbol{\omega}$.
a) Assumendo $\omega = 2\pi \times 10^2$ s^{-1} e $B = 10^{-4}$ T, si valuti nella forza sugli elettroni di conduzione il rapporto tra il termine centrifugo e il termine dovuto al campo magnetico.
Assunte condizioni stazionarie, si calcoli
b) il campo elettrico nel cilindro e le densità di carica di volume e superficie,
c) il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ dovuto alle correnti generate dalla rotazione, valutandone l'intensità in rapporto a $\mathbf{B}$ (assumendo valori "realistici" per il raggio a).
d) (facoltativo) Si assuma che il cilindro non sia conduttore ma di materiale dielettrico con suscettività χ. Si calcoli la polarizzazione del cilindro e le densità di carica di polarizzazione.

2



Due sfere conduttrici identiche di raggio a sono immerse in un liquido di conducibilità σ e costante dielettrica ϵ. La distanza tra i centri delle sfere è $\ell \gg a$. Tra le sfere si mantiene, con un generatore di tensione, la differenza di potenziale V.
Si trascurino in prima istanza gli effetti di induzione elettrostatica. Calcolare
a) la carica su ciascuna sfera,
b) la corrente I che scorre tra le sfere e la resistenza fra esse $R = V/I$.
c) Se le sfere vengono disconnesse dal generatore, calcolare con quale legge temporale e quale tempo caratteristico ciascuna sfera si scarica.
d) (facoltativo) Si discuta se e come gli effetti di induzione elettrostatica tra le sfere modificano le risposte precedenti (ci si limiti all'ordine più basso in a/ℓ).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) In coordinate cilindriche

$$\mathbf{F}_c = m_e\omega^2\mathbf{r}, \qquad \mathbf{F}_m = -e\mathbf{v}\times\mathbf{B} = -e\omega B\mathbf{r}, \qquad \frac{F_c}{F_m} = \frac{\omega}{eB/m_e} \sim 3.6\times 10^{-5}. \tag{1}$$

Il termine magnetico è dominante (anche se $\mathbf{B}$ è il solo campo magnetico terrestre).
b) D'ora in poi consideriamo solo il termine magnetico. In condizioni stazionarie

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{B} = -\omega B\mathbf{r}. \tag{2}$$

Questo campo è generato da una densità uniforme di carica

$$\rho = \epsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{2\epsilon_0}{r}E(r) = -2\epsilon_0\omega B. \tag{3}$$

Poiché il cilindro è elettricamente neutro sulla superficie si trova una densità di carica superficiale data da

$$\sigma = -\frac{\pi a^2 h\rho}{2\pi a h} = -\frac{\rho a}{2} = \epsilon_0\omega B a. \tag{4}$$

c) Per effetto della rotazione si ha una distribuzione di corrente $\mathbf{j} = \rho\omega r\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Il campo magnetico può essere calcolato dividendo tale distribuzione in una serie di solenoidi di raggio r compreso tra 0 e a, nei quali scorre la corrente superficiale $d\iota = j dr$; ogni solenoide genera quindi per $r' < r$ il campo $dB = \mu_0 d\iota$. Occorre poi aggiungere il contributo della corrente $\iota_s = \sigma\omega a$ sulla superficie esterna del cilindro. Quindi

$$B_1(r) = \int_r^a \mu_0 d\iota + \mu_0\iota_s = \mu_0\epsilon_0\omega^2 B\left(\int_r^a 2r'dr' - a^2\right) = \mu_0\epsilon_0\omega^2 B r^2, \tag{5}$$

$$\frac{B_1}{B} = \frac{\omega^2 r^2}{c^2} \ll 1. \tag{6}$$

d) La forza magnetica è equivalente ad un campo elettrico "apparente" $\mathbf{E}_B = \mathbf{v}\times\mathbf{B} = \omega B\mathbf{r}$. Il campo totale nel dielettrico sarà la somma del campo "apparente" $\mathbf{E}_B$ e del campo indotto dalle cariche di polarizzazione $\mathbf{E}_p$, tale che $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_p = \rho_p/\epsilon_0$. Possiamo allora scrivere

$$\mathbf{P} = \epsilon_0\chi(\mathbf{E}_B + \mathbf{E}_p) = \epsilon_0\chi(\omega B\mathbf{r} + \mathbf{E}_p). \tag{7}$$

Poiché $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\rho_p$, possiamo scrivere

$$\rho_p = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P} = -\epsilon_0\chi\boldsymbol{\nabla}\cdot(\omega B\mathbf{r} + \mathbf{E}_p) = -2\epsilon_0\chi\omega B - \chi\rho_p, \tag{8}$$

da cui ricaviamo

$$\rho_P = -\frac{2\epsilon_0\chi}{1+\chi}\omega B = -\frac{2\epsilon_0\chi}{\epsilon_r}\omega B. \tag{9}$$

Per la densità di carica superficiale

$$\sigma_P = -\epsilon_0 E_P(a) = -\epsilon_0\left(\frac{\rho_p}{2\epsilon_0}a\right) = \frac{\epsilon_0\chi}{\epsilon_r}\omega B a. \tag{10}$$

2

a) Trascurando effetti di induzione le cariche saranno distribuite uniformemente. Per simmetria le cariche saranno $\pm Q$ e i potenziali $\pm V/2$, quindi

$$\frac{V}{2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon a}, \qquad Q = 2\pi\epsilon a V. \tag{11}$$

b) Metodo laborioso per trovare I: calcolo esplicito del flusso della corrente sul piano di separazione

$$\begin{aligned} I &= \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^\infty \sigma E_x(\rho) 2\pi\rho d\rho, &(12)\\ E_x(\rho) &= \frac{2Q}{4\pi\epsilon}\frac{\ell/2}{[(\ell/2)^2+\rho^2]^{3/2}}, &(13)\\ I &= \frac{Q\sigma}{\epsilon}\int_0^\infty \frac{\rho}{[(\ell/2)^2+\rho^2]^{3/2}}d\rho = \frac{\sigma}{\epsilon}Q = 2\pi\sigma a V. &(14)\end{aligned}$$

Metodo rapido: I può essere calcolata su una superficie chiusa qualsiasi attorno ad una delle sfere; applicando Gauss

$$\int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \sigma\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \sigma\frac{Q}{\epsilon}. \tag{15}$$

La resistenza è

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a}. \tag{16}$$

c) Basta applicare la legge di conservazione della carica

$$\frac{dQ}{dt} = -I = -\frac{\sigma}{\epsilon}Q, \tag{17}$$

$$Q(t) = Q(0)e^{-t/\tau}, \qquad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}. \tag{18}$$

d) All'ordine più basso in a/ℓ gli effetti di induzione possono essere inclusi descrivendo il campo come prodotto da cariche $\pm Q$ poste nei centri delle sfere e cariche $\pm q = \pm(a/\ell)Q$ poste a distanza $b = a^2/d$ dai centri, lungo la congiungente. Il potenziale di ciascuna sfera risulta uguale a $\pm Q/4\pi\epsilon a$, quindi $Q = 2\pi\epsilon a V$, e la carica indotta è $\pm(Q+q) = \pm Q(1+a/\ell)$.

Il flusso di $\mathbf{E}$ attraverso una superficie attorno a ciascuna sfera vale adesso $Q(1+a/\ell)/\epsilon$. La resistenza è adesso $R = [2\pi\sigma a(1+a/\ell)]^{-1}$.

Infine il tempo di scarica non cambia, in quanto ora possiamo scrivere

$$\frac{d(Q+q)}{dt} = -I = -\frac{\sigma}{\epsilon}(Q+q). \tag{19}$$