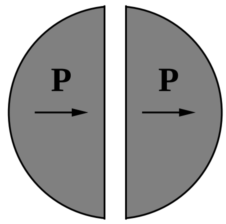
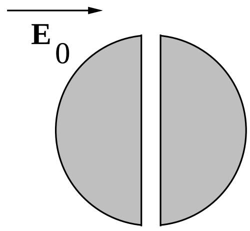
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2008-2009

Compito di Fisica B1 (11/02/2009)

1

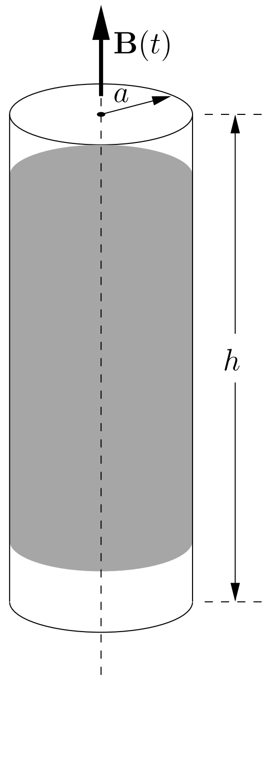


Da una sfera di raggio a, avente una polarizzazione elettrica permanente $\mathbf{P}$, viene divisa in due semisfere "tagliando" via un disco centrale di raggio massimo e spessore $d \ll a$ come in figura.
Calcolare, entro un'approssimazione opportuna (da discutere) e trascurando effetti di bordo
a) la densità di carica di polarizzazione sulle superfici delle semisfere,
b) il campo elettrico all'interno delle semisfere e nella regione di intercapedine.



Si considerino ora due semisfere conduttrici con la stessa disposizione e dimensione delle semisfere polarizzate dei punti precedenti. Le semisfere sono elettricamente isolate e scariche. Il sistema viene posto in un campo esterno $\mathbf{E}_0$ ortogonale al piano di separazione.
Calcolare, entro un'approssimazione analoga ai punti **a)** e **b)**
c) la densità di carica superficiale sulle sfere e il campo elettrico nella regione di separazione,
d) (*facoltativo*)la forza tra le due semisfere, integrando la pressione elettrostatica sulle superfici.

2



Un lungo cilindro di raggio a e altezza $h \gg a$ contiene un plasma di elettroni (carica $-e$ e massa m_e) e ioni (carica $+e$ e massa m_i) con eguali densità di particelle n. La resistività elettrica del plasma è trascurabile. A $t = 0$ viene acceso un campo magnetico $\mathbf{B}(t)$, parallelo all'asse del cilindro, che raggiunge al tempo t_0 il valore B_0. Calcolare, al tempo t_0
a) la velocità azimutale di ioni ed elettroni (si trascuri il moto radiale) in funzione della distanza r dall'asse del cilindro (assunto come asse di simmetria del sistema);
b) in funzione della distanza r dall'asse del cilindro, la corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ indotta nel plasma e il campo magnetico $\mathbf{B}_1(r)$ prodotto da $\mathbf{J}$ (discutendo il contributo relativo di ioni e elettroni).
c) Si discuta sotto quali condizioni $B_1 \ll B_0$, mostrando che questo dipende dalla densità n attraverso il parametro $\omega_p = \sqrt{ne^2/\epsilon_0 m_e}$ (frequenza di plasma).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) Su ogni superficie la carica di polarizzazione è data da

$$\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n} = \begin{cases} \pm P & \text{(sup. interne)} \\ P\cos\theta & \text{(sup. esterne)} \end{cases} \tag{1}$$

b) Poiché $d \ll a$ possiamo approssimare il campo totale come la somma del campo generato da una sfera con uniformemente polarizzata (uniforme e uguale a $-\mathbf{P}/3\epsilon_0$ all'interno della sfera, di dipolo all'esterno) con quello di un disco sottile avente polarizzazione *opposta*; quest'ultimo è analogo al campo di un condensatore piano e quindi (trascurando effetti ai bordi) vale $\mathbf{P}/\epsilon_0$ all'interno ed è nullo fuori. Quindi in questa approssimazione il campo è uguale a quello della sfera polarizzata dappertutto tranne nell'intercapedine dove vale

$$\mathbf{E}_i = -\mathbf{P}/3\epsilon_0 + \mathbf{P}/\epsilon_0 = 2\mathbf{P}/3\epsilon_0. \tag{2}$$

c) Si procede notando l'analogia col caso precedente.

Sulle superfici esterne assumiamo che la densità di carica sia uguale a quella di una sfera conduttrice di raggio a posta in un campo esterno:

$$\sigma_e = 3\epsilon_0 E_0 \cos\theta, \tag{3}$$

dove $\cos\theta > 0$ e $\cos\theta < 0$ corrispondono rispettivamente alle superfici esterne delle semisfere destra e sinistra. La carica totale sulla superficie della semisfera destra è quindi

$$Q_e = \int \sigma_e r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi = 3\epsilon_0 E_0 \times 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta = 3\pi\epsilon_0 E_0 a^2, \tag{4}$$

mentre è pari a $-Q_e$ per l'altra semisfera. Questa distribuzione produce un campo $-\mathbf{E}$ all'interno della sfera di raggio a posta nell'origine, quindi poiché $d \ll a$ con buona approssimazione il campo totale è nullo all'interno delle semisfere. Tuttavia, poichè le semisfere sono isolate e scariche, sulle superfici interne dovrà trovarsi una carica $Q_i = \mp Q_e$, rispettivamente. Se Q_i è distribuita con densità uniforme $\sigma_i = Q_i/\pi a^2$, trascurando gli effetti di bordo il campo generato da tali cariche è nullo al di fuori della regione di separazione (e quindi il campo totale all'interno delle sfere rimane nullo) mentre tra le superfici vale

$$\mathbf{E}_i = \frac{|\sigma_i|}{\epsilon_0}\hat{\mathbf{E}} = 3\mathbf{E}_0. \tag{5}$$

Questo il campo totale nella regione di seprazione, in quanto il campo generato nella stessa regione dalle cariche sulle superfici esterne cancella il campo esterno.

d) Per simmetria la forza tra le semisfere sarà diretta nella direzione parallela a $\mathbf{E}_0$ (direzione $\hat{\mathbf{x}}$), e per fissare le idee la calcoliamo per la semisfera di destra.

Consideriamo dapprima la superfice interna, dove la densità di carica è negativa; il campo è positivo, quindi la forza è negativa, ovvero tende a tirare la semisfera verso l'altra:

$$F_i = -\frac{1}{2}\sigma_i E_i \pi a^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E_i^2 \pi a^2 = -\frac{9\pi}{2}\epsilon_0 E_0^2 a^2. \tag{6}$$

Sulle superfici esterne il campo è la somma del campo esterno $\mathbf{E}_0$ e del campo del dipolo indotto:

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}(r=a) = \mathbf{E}_0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a^3}\left[3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{p}\cdot\hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{p}\right], \tag{7}$$

ed essendo $\mathbf{p} = 4\pi a^3 \mathbf{E}_0$

$$\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_0 + 3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}_0\cdot\hat{\mathbf{n}}) - \mathbf{E}_0 = 3\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{E}_0\cdot\hat{\mathbf{n}}), \qquad E_{e,x} = 3\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{E}_0\cdot\hat{\mathbf{n}}) = 3E_0\cos^2\theta. \tag{8}$$

La forza totale sulla superficie esterna è data da

$$\begin{aligned} F_e &= \int dS\frac{1}{2}E_{e,x}\sigma_e = 2\pi a^2\int_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\frac{1}{2}(3E_0\cos^2\theta)(3\epsilon_0 E_0\cos\theta) = 9\pi a^2\epsilon_0 E_0^2\int_0^1 x^3 dx \\ &= \frac{9\pi}{4}a^2\epsilon_0 E_0^2. \end{aligned} \tag{9}$$

La forza risultante è quindi

$$F = F_i + F_e = -\frac{9\pi}{4}a^2\epsilon_0 E_0^2 \tag{10}$$

ed è attrattiva.

2

a) Un campo magnetico uniforme variabile nel tempo induce, per la legge di Faraday-Neumann, una forza elettromotrice con linee di forza circolari e con intensità

$$E_\phi(r,t) = -\frac{r}{2}\partial_t B, \tag{11}$$

che accelererà le particelle cariche secondo la legge

$$m\frac{dv}{dt} = qE, \qquad \text{quindi la velocità finale sarà} \quad v = \frac{q}{m}\int_0^{t_0} E(r,t')\,dt' = -\frac{qr}{2m}B_0 \tag{12}$$

b) La corrente degli ioni è $\sim (m_e/m_i)$ volte la corrente degli elettroni, e quindi può essere trascurata

$$J(r) = -nev = \frac{ne^2 r}{2m_e}B_0. \tag{13}$$

Il campo magnetico indotto dalla corrente che circola nel guscio cilindrico compreso tra r e $r+dr$ è lo stesso che sarebbe prodotto da un solenoide di raggio r con il prodotto $nI = J(r)dr$. Quindi, per il campo B_1 abbiamo

$$B_1(r) = \mu_0\int_r^a J(r')dr' = \frac{ne^2}{4m_e\epsilon_0 c^2}(a^2 - r^2)B_0, \tag{14}$$

c) Il valore massimo di B_1 si ha per $r = 0$, e vale

$$B_1(0) = \frac{ne^2a^2}{4m_e\epsilon_0 c^2}B_0 = \frac{\omega_p^2 a^2}{4c^2}B_0, \tag{15}$$

quindi, perché sia $B_1 \ll B_0$ deve essere $(\omega_p a/2c)^2 \ll 1$.