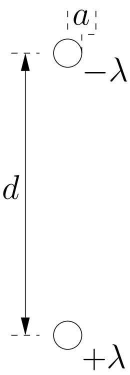
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Compito di Fisica B1 (10/02/2010)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

1



Due fili metallici infiniti e paralleli, a sezione circolare di raggio a, sono posti a distanza $d \gg a$. Sui fili si trova una carica per unità di lunghezza pari rispettivamente a $+\lambda$ e $-\lambda$. I fili sono immersi in un mezzo dielettrico omogeneo e isotropo di permittività ε. (Nel seguito la densità di carica, l'intensità di corrente tra i fili, la resistenza e la capacità sono correttamente definite per unità di lunghezza; se si preferisce, si consideri un tratto dei fili di lunghezza ℓ, così che $Q = \lambda\ell$ è la carica ivi contenuta, etc.)

Si assumano dapprima trascurabili gli effetti di induzione elettrostatica, ovvero si assuma che la carica sia uniformemente distribuita sui fili. Calcolare

a) il campo elettrico in tutto lo spazio,

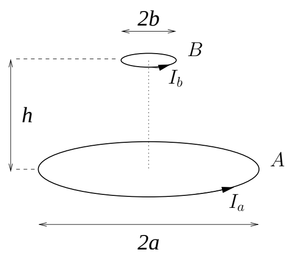
b) la differenza di potenziale V tra i fili e la capacità per unità di lunghezza $\mathcal{C} = \lambda/V$.

Si assuma adesso che il mezzo circostante abbia anche una conducibilità σ.

c) Calcolare la corrente totale (per unità di lunghezza) $\mathcal{I}$ che fluisce tra i fili in condizioni stazionarie e la resistenza tra i fili per unità di lunghezza $\mathcal{R} = V/\mathcal{I}$. (**NB**: si può, ma *non* è necessario, calcolare esplicitamente un integrale di superficie per arrivare al risultato).

d) Discutere, anche solo qualitativamente e in maniera approssimata, come si può tenere conto degli effetti di induzione elettrostatica tra i fili.

2

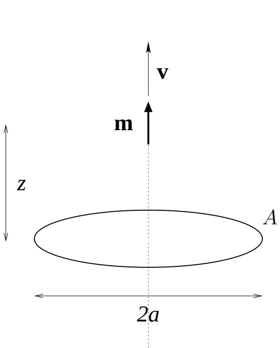


Due spire circolari conduttrici A e B aventi raggi rispettivamente a e $b \ll a$ sono disposte coassialmente ad una distanza $h \gg b$ con i propri piani paralleli come in figura. Si supponga che nella spira maggiore A e minore B siano mantenute le correnti continue e di verso concorde I_a ed I_b, rispettivamente. Calcolare

a) il flusso del campo magnetico generato dalla spira A sulla spira B,

b) la forza magnetica tra le spire,

c) il flusso del campo magnetico generato dalla spira B sulla spira A.



Si consideri ora il seguente problema: una particella si muove con velocità $\mathbf{v}$ costante lungo l'asse della spira A, la quale è ora disconnessa da ogni generatore di tensione o corrente. La particella è dotata di momento magnetico $\mathbf{m}$ parallelo a $\mathbf{v}$.

d) Calcolare la forza elettromotrice indotta nella spira in funzione di $\mathbf{v}$ e della posizione $z = vt$ della particella.

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell nel vuoto ($\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})$$

Campo magnetico sull'asse di una spira circolare di raggio r posta a $z = 0$ e percorsa dalla corrente I

$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ia^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

Momento magnetico equivalente di una spira piana ($\hat{\mathbf{n}}$ versore perpendicolare alla superficie S nel verso di circolazione della corrente)

$$\mathbf{m} = SI\hat{\mathbf{n}}.$$

Forza su un circuito C percorso dalla corrente I in un campo magnetico esterno $\mathbf{B}$

$$\mathbf{F} = \oint_C I d\mathbf{l}\times\mathbf{B},$$

dove l'elemento di cammino infinitesimo $d\mathbf{l}$ è orientato nel verso della corrente.

Energia potenziale di un momento magnetico $\mathbf{m}$ in un campo magnetico esterno $\mathbf{B}$

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}.$$

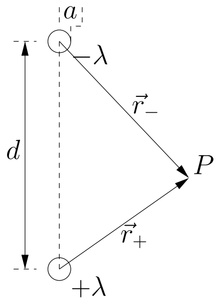
Integrale definito eventualmente utile

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{a}.$$

SOLUZIONI

1

a) Il campo elettrico generato dai fili di densità lineare di carica: $+\lambda$ e $-\lambda$ nel punto P vale



$$\vec{E}(P) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{\hat{r}_+}{r_+} - \frac{\hat{r}_-}{r_-}\right) \tag{1}$$

dove $\hat{r}_+$ e $\hat{r}_-$ sono i versori delle distanze dai due fili, diretti verso il punto.

b) Sulla linea tratteggiata della figura, al di fuori dei conduttori, il campo elettrico è diretto lungo la linea tratteggiata stessa, dal filo positivo verso il filo negativo, e vale

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{d-r}\right), \tag{2}$$

dove r è la distanza dall'asse del filo positivo. La differenza di potenziale tra i due fili vale quindi

$$V = \int_a^{d-a} E(r)\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\int_a^{d-a}\frac{dr}{r} + \int_a^{d-a}\frac{dx}{x}\right) = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon}\int_a^{d-a}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{\pi\varepsilon}\log\left(\frac{d-a}{a}\right), \tag{3}$$

dove nel secondo integrale in parentesi si è fatta la sostituzione $x = d - a$. La capacità per unità di lunghezza vale quindi

$$\mathcal{C} = \frac{\lambda}{V} = \frac{\pi\varepsilon}{\log[(d-a)/a]}. \tag{4}$$

c) Metodo breve. Consideriamo una qualunque superficie S che racchiuda un tratto di lunghezza unitaria di uno solo dei due fili (quello carico positivamente per fissare le idee). L'intensità di corrente cercata è data dal flusso della densità di corrente $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ attraverso la superficie

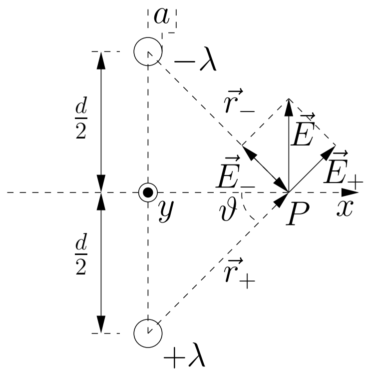
$$\mathcal{I} = \int_S \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S} = \sigma\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} \tag{5}$$

indipendentemente dalla particolare S scelta. Per il teorema di Gauss, d'altra parte

$$\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{\lambda}{\varepsilon} \tag{6}$$

da cui $\mathcal{I} = \sigma\lambda/\varepsilon$.

Metodo lungo. Consideriamo il piano di simmetria, parallelo ai due fili, perpendicolare alla distanza tra loro, ed a distanza $d/2$ da entrambi gli assi. Sul piano prendiamo un asse y perpendicolare al foglio, sulla proiezione dei fili sul piano stesso, e l'asse x come in figura. In ogni punto del piano il campo elettrico sarà perpendicolare al piano stesso, dipenderà solo dalla coordinata x, e sarà diretto dal semispazio che contiene il filo positivo a quello che contiene il filo negativo. Nel punto P avremo



$$\begin{aligned} E(x) &= 2\cdot\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}}\sin\vartheta \\ &= 2\cdot\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}}\frac{\frac{d}{2}}{\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{d}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2}, \end{aligned} \tag{7}$$

che comporta una densità di corrente $\vec{J} = \sigma\vec{E}$. Per unità di lunghezza, avremo quindi una corrente dal semispazio col filo positivo a quello col filo negativo

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{+\infty} J dx = \frac{\sigma\lambda d}{2\pi\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2} = \frac{\sigma\lambda}{\varepsilon} \tag{8}$$

La resistenza per unità di lunghezza è quindi data da

$$\mathcal{R} = \frac{V}{\mathcal{I}} = \frac{\log[(d-a)/a]}{\pi\sigma}. \tag{9}$$

d) Consideriamo un filo carico infinito esterno e parallelo all'asse di un cilindro conduttore di raggio a, con d distanza tra il filo e l'asse del cilindro. La densità lineare di carica del filo è λ. Il problema del campo elettrico in tutto lo spazio si risolve ponendo un filo immagine all'interno del cilindro, con densità lineare di carica $-\lambda$, e posto a distanza a^2/d dall'asse. Il problema può essere risolto iterativamente, partendo dall'approssimazione zero in cui il campo è quello creato da due fili di densità lineare di carica $\pm\lambda$ lungo gli assi dei due cilindri. Poi, di ognuno dei due fili si fa l'immagine all'interno dell'altro cilindro. Poi le immagini delle immagini, e così via ...

2

a) Il campo magnetico generato dalla spira A sul proprio asse è diretto lungo l'asse stesso, e, a distanza h dal centro della spira, vale

$$B_a(h) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_a\,a^2}{(a^2+h^2)^{3/2}}, \tag{10}$$

quindi, in prima approssimazione, il flusso attraverso la spira di raggio b vale

$$\Phi_b(I_a) = \pi b^2 B_a(h) = \frac{\mu_0}{2}\frac{I_a\,a^2\,b^2}{(a^2+h^2)^{3/2}}, \tag{11}$$

b) Con le condizioni del problema la spira B può essere considerata equivalente ad un dipolo magnetico di momento $m = \pi b^2 I_b$, parallelo a, e concorde con, $\mathbf{B}_a$, quindi la sua energia nel campo generato dalla spira A vale

$$U = -\mathbf{m}\cdot\mathbf{B} = -\frac{\mu_0}{2}\frac{I_a\,I_b\,a^2\,b^2}{(a^2+h^2)^{3/2}}. \tag{12}$$

La forza magnetica tra le spire, anche essa diretta lungo l'asse di simmetria, vale

$$F = -\frac{\partial U}{\partial h} = -\frac{3\mu_0}{2}\frac{I_a\,I_b\,a^2\,b^2\,h}{(a^2+h^2)^{5/2}} \tag{13}$$

ed è attrattiva.

In alternativa, si può calcolare la forza dall'integrale

$$\mathbf{F} = \oint_B I_b d\mathbf{l}\times\mathbf{B} \tag{14}$$

dal quale si vede che la forza lungo $\hat{\mathbf{z}}$ è dovuta alle componenti radiali di $\mathbf{B}$ vicino all'asse

$$B_\rho(\rho) \simeq -\frac{\rho}{2}\partial_z B_z \tag{15}$$

come si può ottenere dal teorema di Gauss. Quindi, essendo $\rho = b$ nell'integrando, si ottiene

$$F = 2\pi b I_b \frac{b}{2}\partial_z B_z(h) = \pi b^2 I_b \partial_z B_z(h) = (\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}). \tag{16}$$

c) Dalla (11) vediamo che il coefficiente di mutua induzione tra le due spire vale

$$M_{ab} = \frac{\pi b^2 B_a(h)}{I_a} = \frac{\mu_0}{2}\frac{a^2\, b^2}{(a^2+h^2)^{3/2}}, \tag{17}$$

quindi avremo, per la simmetria dei coefficienti di mutua induzione,

$$\Phi_a(I_b) = M_{ab} I_b = \frac{\mu_0}{2}\frac{I_b\, a^2\, b^2}{(a^2+h^2)^{3/2}}. \tag{18}$$

d) Il campo magnetico generato dalla particella è equivalente a quello generato da una spiretta di raggio b, con $b \ll a$, percorsa da una corrente I_b tale che $m = \pi b^2 I_b$. Quindi la particella induce nella spira A un flusso

$$\Phi_a(t) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m\, a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m\, a^2}{[a^2+(vt)^2]^{3/2}}. \tag{19}$$

Per la forza elettromotrice nella spira avremo

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_a(t)}{dt} = \frac{3\mu_0}{2\pi}\frac{m\, a^2\, v^2\, t}{[a^2+(vt)^2]^{5/2}}. \tag{20}$$