Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2005-2006

Compito di Fisica b1A (12/06/2006)

1

Si consideri un filo metallico di sezione circolare di raggio a e lunghezza infinita, elettricamente neutro. La densità degli elettroni è n.
a) Si ipotizzi che tutti gli elettroni vengono traslati rigidamente di un tratto $d \ll a$ rispetto agli ioni. Trovare il campo elettrico in tutto lo spazio.

Si usi la risposta a) per trovare il campo elettrico in tutto lo spazio nelle successive domande.
b) Un filo conduttore è posto in un campo uniforme E_0, ortogonale al suo asse.
c) Un filo di materiale opportuno (elettrete) ha una polarizzazione permanente P.
d) Un filo dielettrico di permittività ϵ è posto in un campo uniforme E_0, ortogonale al suo asse.

2

Si consideri un cilindro infinito di permeabilità magnetica relativa μ_r e di raggio R in cui è presente una densità di corrente azimutale $\mathbf{J}(r) = a_n r^n \hat{\phi}$.
a) Si calcoli il campo magnetico $\mathbf{B}$ in tutto lo spazio, cioè all'interno ed all'esterno del cilindro.
b) Si assuma adesso che il termine a_n sia lentamente variabile nel tempo. Si calcoli il campo elettrico $\mathbf{E}$ in tutto lo spazio.
c) Si consideri adesso una generalizzazione del problema e sia $\mathbf{J}(r) = \sum_{n=0}^{n=N} a_n r^n \hat{\phi}$. Data la relazione tra il campo magnetico $\mathbf{B}$ ed il potenziale vettore $\mathbf{A}$ e sfruttando l'analogia con la legge di Ampère si calcoli il potenziale vettore $\mathbf{A}$ in tutto lo spazio.
d) Dato $a_0 \neq 0$ si descriva la configurazione "minima" della corrente $\mathbf{J}(r)$ (cioè con il minor numero di termini possibile) affinché il potenziale vettore sia uniformemente nullo all'esterno del cilindro.

SOLUZIONI

1

a)

Il campo elettrico in tutto lo spazio può essere calcolato come quello dato da due fili di raggio a e con densità di carica ne e $-ne$. All'interno del filo si ottiene un campo uniforme

$$\vec{E} = \frac{ne\vec{\delta}}{2\epsilon_0} \tag{1}$$

mentre all'esterno si ha un campo di tipo dipolare dato da

$$\vec{E} = \left(\frac{a^2 ne}{2\epsilon_0}\right) \frac{2\hat{r}(\vec{\delta}\cdot\hat{r}) - \vec{\delta}}{r^2} \tag{2}$$

b)

Se il filo è conduttore il campo elettrico totale all'interno del filo deve essere nullo, quindi il campo elettrico esterno E_0 induce sul filo una separazione di carica tale da generare all'interno del filo un campo elettrico uguale e opposto a quello esterno. Il campo totale all'esterno del filo sarà dato dal campo E_0 più un campo dipolare del tipo visto alla domanda precedente. La densità di carica sulla superficie si ottiene direttamente dalla legge di Gauss.

c)

Nel caso si abbia una polarizzazione P sulla superficie del filo sono presenti delle cariche di polarizzazione date da $\sigma_p = \vec{P}\cdot\hat{r}$. La struttura del campo è uguale al caso a) valutato con la nuova densità di carica.

d)

Nel caso in cui il cilindro sia costituito da un materiale dielettrico è necessario tener conto delle condizione al contorno su $\vec{E}$ e $\vec{D}$. All'interno si ha un campo elettrico uniforme parallelo al campo esterno e di intensità $E_{in} = -\frac{2E_0}{1+\epsilon_r}$. All'esterno il campo totale è dato da E_0 più un campo dipolare dato dalle cariche di polarizzione ottenute da $P = \epsilon_0(1-\epsilon_r)E_{in}$.

2

a)

Il cilindro può essere visto come una serie di solenoidi di spessore dr in ciascuno dei quali scorre una corrente la cui densità lineare è data da $J(r)dr$. Quindi, ricordandoci il campo magnetico in un solenoide, si ha che il campo magnetico a distanza $(r < R)$ dall'asse del cilindro è dato da

$$\mathbf{B}(r) = \mu_0\mu_r \frac{a_n}{n+1}\left[r'^{n+1}\right]_r^R \hat{\mathbf{z}} = \mu_0\mu_r \frac{a_n}{n+1}\left(R^{n+1} - r^{n+1}\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{3}$$

dove $\hat{\mathbf{z}}$ è parallelo all'asse del cilindro. All'esterno del cilindro il campo è invece uniformemente nullo.

b)

Il campo elettrico si ottiene direttamente da $\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$. Prendendo come linea chiusa una circonferenza concentrica all'asse del cilindro con $(r < R)$ si ha

$$2\pi r\mathbf{E}(r) = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^r B(r')2\pi r' dr'\hat{\phi} = -\frac{\mu_0\mu_r}{n+1}\frac{d}{dt}a_n(t)\pi\left(R^{n+1}r^2 - \frac{2r^{n+3}}{n+3}\right)\hat{\phi}. \tag{4}$$

Quindi

$$\mathbf{E}(r) = -\frac{\mu_0\mu_r}{n+1}\frac{d}{dt}a_n(t)\left(\frac{R^{n+1}r}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+3}\right)\hat{\phi}. \tag{5}$$

Per $(r > R)$ l'integrale si estende su tutta la superficie del cilindro e si ha

$$2\pi r\mathbf{E}(r) = -\frac{\mu_0\mu_r}{n+1}\frac{d}{dt}a_n(t)\pi R^{n+3}\frac{n+1}{n+3}\hat{\phi} \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{E}(r) = -\frac{\mu_0\mu_r}{2(n+3)}\frac{d}{dt}a_n(t)\frac{R^{n+3}}{r}\hat{\phi} \tag{6}$$

c) Come noto $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, quindi per calcolare il potenziale vettore si può procedere semplicemente calcolando la circuitazione del flusso del campo magnetico attraverso una superficie delimitata da una linua chiusa. Vista la simmetria del problema come linea chiusa possiamo prendere ancora una volta una circonferenza con centro sull'asse del cilindro. In analogia con la risposta precedente ogni termine della serie dà per $r < R$ un potenziale vettore dato ha

$$\mathbf{A}_n(r) = \frac{\mu_0\mu_r}{n+1}a_n(t)\left(\frac{R^{n+1}r}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+3}\right)\hat{\phi}. \tag{7}$$

Mentre per $(r > R)$ si ha

$$\mathbf{A}_n(r) = \frac{\mu_0\mu_r}{2(n+3)}a_n(t)\frac{R^{n+3}}{r}\hat{\phi} \tag{8}$$

d) Affinché il potenziale sia uniformemente nullo all'esterno del cilindro è sufficiente che sia nullo sulla superficie esterna. Il termine di corrente corrispondente ad a_0 fornisce un potenziale vettore che per $r = R$ vale

$$\mathbf{A}_0(R) = \frac{\mu_0\mu_r}{6}a_0R^2\hat{\phi}. \tag{9}$$

Mentre per un termine generico a_n si ha

$$\mathbf{A}_n(R) = \frac{\mu_0\mu_r}{2(n+3)}a_nR^{n+2}\hat{\phi}. \tag{10}$$

È quindi sufficiente un qualsiasi termine aggiuntivo al termine di ordine zero affinché il potenziale vettore sia nullo sulla superficie del cilindro. La condizione che deve essere verificata è data da

$$a_n = -\frac{a_0(n+3)}{R^n}. \tag{11}$$