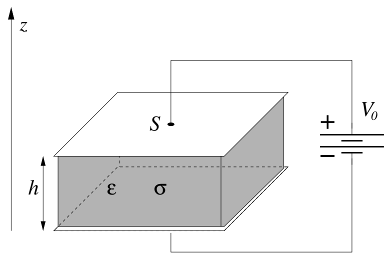
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2006-2007

Compito di Fisica b1 A-B (11/06/2007)

1



Due lastre conduttrici piane di area S sono poste a distanza h l'una dall'altra (vedi figura). Nello spazio compreso tra le lastre è contenuto un dielettrico imperfetto di costante dielettrica ϵ e conducibilità elettrica variabile con l'altezza secondo la legge $\sigma(z) = \sigma_0(1 + z/h)$. Tra le armature è mantenuta una differenza di potenziale costante V_0 . Se il sistema si trova in condizioni stazionarie, ricavare:

a) la densità di corrente che attraversa il dielettrico,
b) la resistenza R tra le lastre,
c) la densità di volume di cariche libere (in funzione di z) tra le lastre.

2

Un fluido scorre con velocità uniforme $\mathbf{v}$ in presenza di un campo magnetico $\mathbf{B}$ perpendicolare a $\mathbf{v}$. La conducibilità elettrica del fluido è pari a σ.
a) Si calcoli la densità di corrente $\mathbf{J}$ indotta nel fluido.
b) Si dia una stima numerica di $|\mathbf{J}|$ per gli oceani terrestri, sapendo che il campo magnetico terrestre (approssimativamente dipolare) ha valore medio $B \simeq 0.5$ Gauss $= 5 \times 10^{-5}$ Tesla, la conducibilità dell'acqua di mare è $\sigma \simeq 4\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ ed un valore tipico della velocità della corrente è $v = 1$ m/s.
c) Per effetto della corrente indotta la forza magnetica tende a frenare il flusso della corrente. Considerando la forza su un elemento di volume del fluido e supponendo che questa sia l'unica forza ad agire su fluido[1], si dia una stima del tempo necessario a rallentare la corrente oceanica, usando i valori del punto **b)** (si suppone nota la densità ρ dell'acqua!).

[1] Ovviamente questa condizione non è verificata in natura.

SOLUZIONI

1

a) Si applica l'equazione di continuita' al dielettrico conduttore $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j}=\mathbf{0}$. A meno di effetti di bordo l'unica dipendenza nei campi non banalmente nulla sarà quella nella direzione $\hat{\mathbf{z}}$

$$0=\frac{\partial}{\partial z}j_z=\frac{\partial}{\partial z}\Big(E_z(z)\ \sigma_0(1+\frac{z}{h})\Big) \tag{1}$$

la soluzione di questa equazione differenziale è data da:

$$\mathbf{E}(z)=E_0\frac{1}{1+\frac{z}{h}}\hat{\mathbf{z}}. \tag{2}$$

Calcoliamo il valore della costante E_0 usando la definizione di differenza di potenziale:

$$V_0=\int_0^h E_z(\tilde{z})d\tilde{z}=\int_0^h E_0\frac{1}{1+\frac{\tilde{z}}{h}}d\tilde{z}=E_0\ h\ln 2. \tag{3}$$

La corrente sarà quindi:

$$\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}=\sigma_0\mathbf{E_0}=\frac{\sigma_0 V_0}{h\ln 2}\hat{\mathbf{z}}. \tag{4}$$

b) Dalla prima legge di Ohm:

$$R=\frac{V_0}{I}=\frac{V_0}{S\ j}=\frac{h\ln 2}{S\ \sigma_0} \tag{5}$$

c) Dalla prima equazione di Maxwell:

$$\rho=\varepsilon\nabla\cdot\mathbf{E}=\varepsilon\frac{d}{dz}\frac{E_0}{1+\frac{z}{h}}=-\varepsilon\ E_0\frac{h}{(h+z)^2}=-\frac{\varepsilon\ V_0}{\ln 2\ (h+z)^2} \tag{6}$$

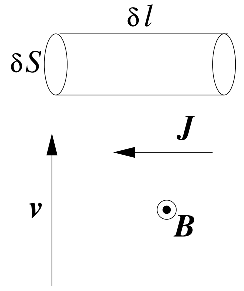
2

a) Per effetto del moto di trascinamento i portatori di carica sono sottoposti ad una forza per unità di carica pari a $\mathbf{v}\times\mathbf{B}$, equivalente ad un campo elettrico $\mathbf{E}_{eq}\equiv\mathbf{v}\times\mathbf{B}$. La densità di corrente indotta è

$$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}_{eq}=\sigma\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \tag{7}$$

b) Inserendo i valori tipici indicati si ha

$$J\simeq 4\times 1\times 5\times 10^{-5}\ \mathrm{A/m^2}=2\times 10^{-4}\ \mathrm{A/m^2}. \tag{8}$$



c) Per l'elemento di fluido prendiamo un cilindretto di superficie laterale δS e altezza $|\delta\mathbf{l}|$, con $\delta\mathbf{l}\parallel\mathbf{J}$. L'intensità di corrente nel cilindretto è $I=J\delta S$ e la forza è $\mathbf{F}=I\delta\mathbf{l}\times\mathbf{B}=-BJ\delta\mathcal{V}\mathbf{v}$, dove $\delta\mathcal{V}$ è il volume del cilindretto, la cui massa è $m=\rho\delta\mathcal{V}$. L'equazione del moto, eliminando $\delta\mathcal{V}$ e sostituendo $J=\sigma vB$, è quindi

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\sigma B^2\mathbf{v}, \tag{9}$$

che ha come soluzione un'esponenziale decrescente con tempo caratteristico

$$\tau=\frac{\rho}{\sigma B^2}\simeq 10^{11}\ \mathrm{s}\simeq 3.5\times 10^3\ \mathrm{yr}, \tag{10}$$

essendo $\rho=10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.