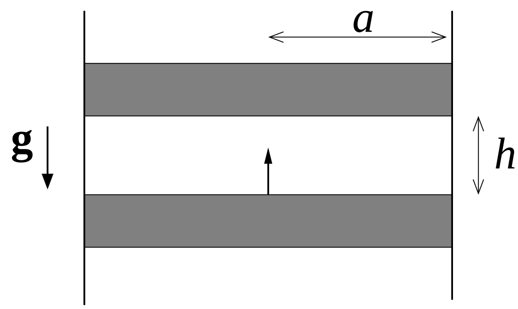
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2008-2009

Compito di Fisica B1 (18/06/2009)

1



Due armature metalliche piane e circolari di raggio a sono poste a distanza $h \ll a$ in una guida cilindrica isolante posta verticalmente nel campo gravitazionale $\mathbf{g}$. L'armatura superiore è fissata, mentre l'armatura inferiore, avente massa m, può scorrere senza attrito lungo la guida.
Si assuma dapprima che le armature siano isolate e possiedano le cariche elettriche $\pm Q$ rispettivamente.
a) Si dica se esiste un valore di Q per cui l'armatura si trova in equilibrio meccanico.
b) Si dica per quali valori di Q l'armatura inferiore, lasciata libera di muoversi, viene infine a contatto con l'armatura superiore, e si determini la velocità con la quale vi giunge.

Si supponga adesso che le armature siano connesse attraverso un generatore che mantiene fra esse una differenza di potenziale costante V.
c) Si risponda di nuovo alle domande **a)** e **b)** in termini dei valori di V.

2

Come è noto le equazioni di Maxwell possono essere modificate per accomodare l'esistenza di "monopoli magnetici". Si ipotizza che un esperimento fornisca evidenza dell'esistenza di tali monopoli, ovvero di particelle che, nel limite in cui possono essere considerate puntiformi, producano un campo magnetico della forma

$$\mathbf{B} = \alpha \frac{q_m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{1}$$

e che l'esperimento stabilisca anche la conservazione della carica magnetica.
a) Determinare (nel Sistema Internazionale) l'espressione della costante α e le dimensioni della carica magnetica q_m rispetto alla carica elettrica q_e. (Suggerimento: si può assumere che il campo di due cariche magnetiche $+q_m$ e $-q_m$ poste a distanza $\mathbf{d}$ sia equivalente al campo di un dipolo magnetico $\mathbf{m} = q_m\mathbf{d}$ a distanze grandi rispetto a $|\mathbf{d}|$.)
b) Si scriva la forma completa assunta dalle equazioni di Maxwell in presenza di monopoli magnetici.
c) Si consideri un fascio di raggio a, di densità uniforme e lunghezza infinita, composto da n particelle per unità di volume con identica carica magnetica q_m e velocità $\mathbf{v}$. Determinare i campi elettrico e magnetico in tutto lo spazio.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) Per Q costante, il campo elettrico tra le armature $E = Q/\epsilon_0 S$ (dove $S = \pi a^2$) è anch'esso costante. La forza sull'armatura vale

$$F = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 S = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}. \tag{2}$$

L'equilibrio meccanico si ha se $F = mg$, da cui ricaviamo

$$Q = \sqrt{2\epsilon_0 S m g} \equiv Q_{\text{eq}}. \tag{3}$$

L'equilibrio è indifferente (indipendente dalla posizione).
b) Se $Q > Q_{\text{eq}}$ l'armatura inferiore viene attratta da quella superiore. Nell'istante del contatto, l'energia cinetica acquistata è pari alla variazione di energia potenziale, che è la somma delle variazioni di energia elettrostatica e di energia gravitazionale:

$$\frac{1}{2} m v^2 = U_i - U_f = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 S} - mgh = \frac{(Q^2 - Q_{\text{eq}}^2) h}{2\epsilon_0 S}, \quad \text{da cui} \quad v_f = \sqrt{\frac{Q^2 h}{m\epsilon_0 S} - 2gh} \tag{4}$$

c) In funzione di V la carica del condensatore vale

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 S V}{h}, \quad \text{da cui} \quad F = \frac{\epsilon_0 S V^2}{2h^2}, \quad \text{e, fissato h, si ha equilibrio per} \quad V_{\text{eq}} = h\sqrt{\frac{2mg}{\epsilon_0 S}}.$$

Poniamo $y = 0$ quando l'armatura inferiore si trova adistanza h dall'armatura superiore, con l'asse y diretto verso l'alto. La distanza tra le armature sarà quindi $h - y$. A V costante, nella variazione di energia dovuta a uno spostamento verticale dell'armatura occorre tenere conto della variazione di energia interna del generatore di tensione $dU_{\text{gen}} = -2dU_{\text{es}}$. Quindi

$$dU = dU_{\text{grav}} + dU_{\text{es}} + dU_{\text{gen}} = dU_{\text{grav}} - dU_{\text{es}} = d(mgy) - d\left(\frac{\epsilon_0 S V^2}{h-y}\right) = mg\,dy - \frac{\epsilon_0 S V^2}{(h-y)^2}\,dy, \tag{5}$$

per cui, l'energia potenziale effettiva è

$$U = U(y) = mgy - \frac{\epsilon_0 S V^2}{h-y}. \tag{6}$$

L'energia ha un minimo per $y = y_{\text{eq}} = h - V\sqrt{\epsilon_0 S/2mg}$, ma si vede facilmente che si tratta di una posizione di equilibrio instabile, per cui se $y > y_{\text{eq}}$ l'armatura inferiore raggiunge quella superiore. Notare che l'energia potenziale diverge a $-\infty$ se $y \to h$ e quindi l'armatura arriverebbe con velocità infinita (fornita dal generatore di tensione ideale).

2

a) Per fissare il valore di α si può osservare che, formando un dipolo magnetico $\mathbf{m} = q_m \mathbf{d}$, l'espressione del campo magnetico generato deve essere

$$\mathbf{B}_{\text{dip}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\mathbf{m}\cdot\hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \tag{7}$$

da cui $\alpha = \mu_0/4\pi = 1/4\pi\epsilon_0 c^2$.

Per le dimensioni, si può notare che $cB = q_m/4\pi\epsilon_0 c r^2$ ha le dimensioni di un campo elettrico, per cui q_m/c deve avere le stesse dimensioni di q_e.

b) In analogia con la l'equazione $\boldsymbol{\nabla} \cdot E = \rho_e/\epsilon_0$ per il campo elettrico, per il campo magnetico deve valere

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m. \tag{8}$$

Per la conservazione della carica magnetica, deve valere l'equazione di contiuità

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}_m + \partial_t \rho_m = 0. \tag{9}$$

Consideriamo ora la terza equazione di Maxwell (legge di Faraday-Neumann) modificata dalla presenza di correnti di monopoli magnetici

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \eta \mathbf{J}_m - \partial_t \mathbf{B} \tag{10}$$

con η costante da determinare. Applicando la divergenza a entrambi i membri otteniamo

$$0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = \eta \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}_m - \partial_t \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \eta \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}_m - \mu_0 \partial_t \rho_m \tag{11}$$

da cui $\eta = -\mu_0$ e la nuova equazione è

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\mu_0 \mathbf{J}_m - \partial_t \mathbf{B}. \tag{12}$$

c) Il sistema ha simmetria cilindrica, con $\mathbf{B}$ radiale e ricavabile dalla legge di Gauss applicata a un cilindretto coassiale col fascio (suppongo $r > a$, il caso $r < a$ si ottiene similmente)

$$2\pi r h B = \mu_0 n q_m \pi a^2 h, \qquad B = \frac{\mu_0 n q_m a^2}{2r} \tag{13}$$

e $\mathbf{E}$ solenoidale e ricavabile dalla legge di Stokes applicata a una circonferenza concentrica

$$2\pi r E = -\mu_0 n q_m v \pi a^2, \qquad E = \frac{\mu_0 n q_m v a^2}{2r}. \tag{14}$$