Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Compito di Fisica B1 (08/06/2010)

Si scriva chiaramente e *si spieghi brevemente ogni passaggio*; risultati dati senza commento *non* saranno considerati.

1

Un condensatore cilindrico (raggi interno ed esterno $r_1 < r_2$, altezza $h \gg r_2$) è posto in serie ad un generatore di tensione costante V. Il condensatore viene riempito d'acqua (permittività dielettrica relativa $\varepsilon > 1$, conducibilità σ) fino ad un livello $l < h$. Calcolare

a) i campi $\vec{E}$ e $\vec{D}$ nel condensatore, e la carica Q sulle armature;

b) la corrente I nel circuito.

Viene ora sconnesso il generatore.

c) Calcolare il tempo di scarica del condensatore in funzione del livello dell'acqua.

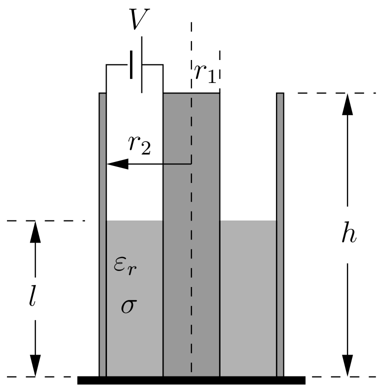

Figura 1

2

Un lungo solenoide cilindrico è costituito da n spire per unità di lunghezza avvolte su di un nucleo cilindrico di ferro di raggio R e lunghezza L, con $L \gg R$. Può quindi essere usata l'approssimazione di solenoide infinito. Il ferro ha permeabilità magnetica relativa μ_r e conducibilità elettrica σ. Nelle spire si fa passare una corrente variabile $I = I_0\, t/\tau$.

a) Calcolare il campo magnetico dentro e fuori dal solenoide.

b) Calcolare il campo elettrico indotto dentro e fuori dal solenoide.

c) Calcolare la densità di corrente indotta nel nucleo ferroso e la potenza dissipata per effetto Joule per unità di lunghezza.

d) Calcolare il campo magnetico generato dalla densità di corrente al punto c) discutendo come esso modifica il campo magnetico totale (Si trascuri la corrente di spostamento.)

Formule utili

Equazioni di Maxwell

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right),
\end{aligned}
$$

Equazioni dell'elettrostatica dei dielettrici isotropi e omogenei non permanenti

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho_{\text{lib}} \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\
\vec{D} &= \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}
\end{aligned}
$$

con ρ_{lib} densità di carica *libera*.

Equazioni del magnetismo in mezzi materiali con magnetizzazione indotta per correnti lentamente variabili

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J}_{\text{lib}}, \\
\vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H}
\end{aligned}
$$

con $\vec{J}_{\text{lib}}$ densità di corrente *libera*.

Potenza dissipata in un mezzo per unità di volume per effetto Joule

$$W_v = \vec{J} \cdot \vec{E}\,.$$

Per un conduttore Ohmico $\vec{J} = \sigma \vec{E}$.

SOLUZIONI

1

a) Il campo elettrico $\vec{E}$ ha simmetria radiale ed è diretto lungo il versore $\hat{r}$ di un sistema di coordinate cilindriche con asse z coincidente con l'asse di simmetria del condensatore. Inoltre $\vec{E}$ è continuo alla superficie dell'acqua, mentre per D abbiamo $D_1 = \varepsilon_0 E$ nel vuoto e $D_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$ nell'acqua. Dalla relazione

$$V = -\int_{r_1}^{r_2} E\, dr$$

si ha

$$E(r) = \frac{V}{\log(r_2/r_1)} \frac{1}{r}, \quad D_1(r) = \varepsilon_0 E(r), \quad D_2(r) = \varepsilon_0 \varepsilon_r E(r).$$

Dal teorema di Gauss abbiamo

$$Q = 2\pi r_1 [D_1(h-l) + D_2 l] = 2\pi r_1 \varepsilon_0 \frac{V}{\log(r_2/r_1)} \frac{1}{r_1} [(h-l) + \varepsilon_r\, l\,] = 2\pi\varepsilon_0 \frac{V}{\log(r_2/r_1)}\ [(h-l) + \varepsilon_r\, l\,]$$

Da $Q = CV$ possiamo ottenere

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0 (h - l + l\varepsilon_r)}{\log(r_2/r_1)},$$

che poteva anche essere ottenuta calcolando la capacità dei due condensatori, con e senza acqua, in parallelo.

b) Integrando la densità di corrente $J = \sigma E$ sulla superficie si ha $I = V/R$ dove

$$R = \frac{\log(r_2/r_1)}{2\pi l \sigma}.$$

c) Il sistema è equivalente ad un circuito RC dove R, C sono dati sopra e quindi

$$\tau = RC = \frac{\varepsilon_0\, (h - l + l\varepsilon_r)}{l\, \sigma}\ .$$

2

a) Trascurando gli effetti di bordo il campo $\mathbf{H}$ è nullo all'esterno del solenoide e uniforme, parallelo all'asse, all'interno, dove vale $H = nI$. Il campo magnetico $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ vale quindi $B = 0$ per $r > R$, e $B = \mu_0 \mu_r H$ per $r < R$.

b) Per simmetria le linee di forza di $\mathbf{E}$ sono circonferenze concentriche col centro sull'asse del cilindro e $\mathbf{E} = E(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Per la legge di Faraday, la circuitazione di $\mathbf{E}$ lungo la circonferenza di raggio r è uguale a meno la derivata temporale del flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la circonferenza. Fuori dal solenoide abbiamo

$$2\pi r E_{\text{ext}}(r) = -\frac{d\Phi_{\text{ext}}}{dt} = -\pi R^2 \mu_0 \mu_r \frac{nI_0}{\tau},$$

ovvero

$$E_{\text{ext}}(r) = -R^2 \mu_0 \mu_r \frac{nI_0}{2\tau r}.$$

Per $r < R$ abbiamo

$$2\pi r E_{\text{ferro}}(r) = -\frac{d\Phi_{\text{interno}}}{dt} = -\pi r^2 \mu_0 \mu_r \frac{nI_0}{\tau},$$

da cui

$$E_{\text{ferro}}(r) = -\mu_0 \mu_r \frac{nI_0}{2\tau} r \,.$$

c) Poiché il ferro ha conducibilità non nulla, il campo elettrico di induzione induce una densità di corrente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$. La potenza dissipata per effetto Joule nell'unità di volume è

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = \sigma \left(\mu_0 \mu_r \frac{nI_0}{2\tau} r \right)^2 ,$$

La potenza totale si trova integrando sul volume del nucleo di ferro. Si ottiene, per unità di lunghezza

$$\frac{dP}{dh} = \sigma \left(\mu_0 \mu_r \frac{nI_0}{2\tau} \right)^2 \int_0^R r^2 2\pi r dr = \pi \frac{R^4}{2} \sigma \left(\mu_0 \mu_r \frac{nI_0}{2\tau} \right)^2 .$$

d) La corrente $\mathbf{J}$, oltre a causare dissipazione per effetto Joule, genera un campo magnetico $\mathbf{B}_1$. Per calcolarlo osserviamo che la corrente totale contenuta nello strato compreso tra r e $r + dr$ è equivalente ad una corrente superficiale $\boldsymbol{\iota} = \mathbf{J} dr$, cioè per ogni r possiamo vedere gli strati tra r e R come una serie di solenoidi concentrici, ognuno dei quali produce il campo $d\mathbf{H}_1 = \iota \hat{\mathbf{z}}$ (essendo ι equivalente a nI). Quindi

$$H_1(r) = \int_r^R \sigma E dr = -\frac{\sigma \mu_0 \mu_r n I_0}{2\tau} \int_r^R r\, dr = -\frac{\sigma \mu_0 \mu_r n I_0}{4\tau} \left(R^2 - r^2 \right)$$

e

$$B_1(r) = \mu_0 \mu_r H_1 = -\frac{\sigma \mu_0^2 \, \mu_r^2 n I_0}{4\tau} \left(R^2 - r^2 \right) .$$

La correzione al campo ha un profilo parabolico, è negativa (ovvero cancella parte del campo di ordine zero), nulla ai bordi del solenoide e massima al centro. Il campo *totale* è $\mathbf{B} = [\mu_0 \, \mu_r n I + B_1(r)] \hat{\mathbf{z}}$.