Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Compito di Fisica B1 (29/06/2010)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

1

Una carica Q è distribuita uniformemente su un guscio sferico di raggio a e spessore trascurabile.
a) Determinare il campo e il potenziale elettrico in tutto lo spazio.
Sotto l'azione delle forze elettrostatiche il guscio si espande. Determinare il lavoro fatto da queste forze quando il guscio ha raddoppiato il proprio raggio nei due modi seguenti:
b) calcolando la variazione di energia elettrostatica del sistema,
c) calcolando direttamente il lavoro fatto dalla pressione elettrostatica sul guscio.

2

In una regione di spazio dove non vi sono correnti si trova un campo magnetico statico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, z)$ avente simmetria cilindrica (cioè di rotazione attorno all'asse $\hat{\mathbf{z}}$). La componente del campo lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ è nota e vale $B_z = B_0 z/L$.
Una piccola spira circolare di raggio a e resistenza R viene mantenuta in moto con velocità costante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$, con il proprio asse parallelo all'asse $\hat{\mathbf{z}}$.

a) Calcolare la corrente indotta nella spira, indicandone il verso.
b) Calcolare la potenza P dissipata nella spira per effetto Joule e la forza $\mathbf{F}$ necessaria a mantenere la spira in movimento, tale che $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = P$.

Poiché la spira si muove con velocità costante, la forza $\mathbf{F}$ deve essere opposta alla forza esercitata dal campo magnetico sulla spira:

$$\mathbf{F} = -\oint_{\text{spira}} I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}. \tag{1}$$

c) Si determini $\mathbf{F}$ usando la (1), calcolando a tale scopo le componenti opportune di $\mathbf{B}$.

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B}, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \end{aligned}$$

Operatore divergenza in coordinate cilindriche:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z. \tag{2}$$

Energia elettrostatica associata ad una distribuzione di campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ ovvero di densità di carica $\rho = \rho(\mathbf{x})$ e di potenziale $V = V(\mathbf{x})$:

$$U_{\text{es}} = \int \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2(\mathbf{x}')d^3x' = \int \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x}')V(\mathbf{x}')d^3x'. \tag{3}$$

Soluzioni

1

a) Il problema elettrostatico proposto è analogo al problema di una carica Q posta su un conduttore sferico di raggio a: campi e potenziali sono gli stessi. In particolare, posto $k_0 = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$, abbiamo per il campo elettrico:

$$\mathbf{E}(r) = k_0 \frac{Q}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \qquad r \geqslant a; \qquad \mathbf{E} = 0, \qquad r < a, \tag{4}$$

mentre per il potenziale, con la scelta naturale $V(r \to \infty) = 0$:

$$V(r) = k_0 \frac{Q}{r}, \qquad r \geqslant a; \qquad V(r) = k_0 \frac{Q}{a}, \qquad r < a. \tag{5}$$

Sul guscio si trova una distribuzione di carica superficiale uniforme σ:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{a^2}. \tag{6}$$

b) Il lavoro fatto dalle sole forze elettrostatiche è uguale alla variazione di energia elettrostatica cambiata di segno:

$$\mathcal{L} = -\Delta U_{\text{es}} = U_i - U_f. \tag{7}$$

Ora l'unica regione in cui varia l'energia elettrostatica è il guscio sferico di raggio interno a e raggio esterno $2a$, dove il campo elettrico (radiale) passa dal valore $E(r) = k_0 Q/r^2$ al valore zero, perciò abbiamo, utilizzando coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2(x')d^3x' = \frac{1}{2}\epsilon_0 k_0^2 \int d\Omega \int_a^{2a} \frac{Q^2}{r^4} r^2 dr \\ &= \frac{1}{2} 4\pi\epsilon_0 k_0^2 Q^2 \left[-\frac{1}{r}\right]_a^{2a} = \frac{1}{4} k_0 \frac{Q^2}{a}. \end{aligned} \tag{8}$$

c) La pressione elettrostatica è uniforme su tutto il guscio ed è diretta radialmente verso l'esterno (quale che sia il segno di Q). In corrispondenza del guscio di raggio r, il suo valore è dato da:

$$p_{\text{es}}(r) = \sigma E_{\text{medio}}(r) = \sigma \frac{E_\perp(r^+) + E_\perp(r^-)}{2} = \frac{1}{2}\sigma k_0 \frac{Q}{r^2} = \frac{1}{8\pi} k_0 \frac{Q^2}{r^4}. \tag{9}$$

Per ottenere il lavoro delle forze elettrostatiche si deve calcolare prima il lavoro $d\mathcal{L}$ su un elemento infinitesimo dS di superficie durante l'espansione. La forza che agisce su $dS = r^2 d\Omega$ è, in corrispondenza del guscio di raggio r:

$$df(r) = p_{\text{es}}(r)dS = \frac{1}{8\pi} k_0 \frac{Q^2}{r^4} r^2 d\Omega = \frac{1}{8\pi} k_0 \frac{Q^2}{r^2} d\Omega. \tag{10}$$

Il lavoro fatto su questo elemento infinitesimo è:

$$d\mathcal{L} = \int_a^{2a} df(r)dr = \int_a^{2a} \frac{1}{8\pi} k_0 \frac{Q^2}{r^2} d\Omega dr = \frac{1}{8\pi} k_0 \frac{Q^2}{2a} d\Omega. \tag{11}$$

Resta da integrare sull'intero angolo solido, 4π, per ottenere il risultato (8). D'altra parte si osservi che la pressione elettrostatica è uguale a $1/2\epsilon_0 \mathbf{E}^2$, cioè alla densità di energia elettrostatica utilizzata al punto precedente.

2

a) Il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la superficie della spira è $\Phi_s(\mathbf{B}) = B_z \pi a^2$ (dato che la componente radiale del campo non dà flusso). Quindi la f.e.m indotta è:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -\pi a^2 B_0 v/L, \tag{12}$$

dove $dz/dt = v$. La corrente è $I = \mathcal{E}/R$: per la legge di Lenz, se $B_0/L > 0$ la corrente scorre in verso orario rispetto all'asse $\hat{\mathbf{z}}$, altrimenti in verso antiorario.

b) La potenza dissipata è: $P_d = -RI^2 = -(\pi a^2 B_0 v/L)^2/R$. In presenza di dissipazione, la forza necessaria a mantenere la spira in moto a velocitá costante dovrà avere lo stesso segno della velocit}a. La potenza sviluppata dalla forza è allora:

$$P = -P_d = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad F = -\frac{P_d}{v} = \frac{v}{R}\left(\pi a^2 \frac{B_0}{L}\right)^2. \tag{13}$$

c) Le forze radiali sui singoli tratti infinitesimi della spira (dovute alla componente assiale del campo magnetico) hanno ovviamente somma nulla. Perciò la forza netta sulla spira è diretta lungo $\hat{\mathbf{z}}$ ed è dovuta alla componente radiale del campo magnetico, in corrispondenza della spira:

$$\mathbf{F} = -\oint_{\text{spira}} I r d\theta B_\rho(\rho = a) \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\mathbf{r}} = 2\pi a I B_\rho(\rho = a) \hat{\mathbf{z}}. \tag{14}$$

Utilizzando la divergenza in coordinate cilindriche:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho(\rho B_\rho) + \partial_z B_z \tag{15}$$

e ricordando che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$, si trova $\partial_\rho(\rho B_\rho) = -B_0 \rho/L$ da cui, integrando, $B_\rho = -B_0 \rho/2L$.

Allo stesso risultato si arriva considerando il teorema di Gauss per una superficie cilindrica di raggio ρ ed altezza h intorno all'asse z:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \pi \rho^2 [B_z(z + h) - B_z(z)] + 2\pi \rho h B_\rho(\rho) = 0 \tag{16}$$

da cui si ricava il risultato precedente. In definitiva, sostituendo le relazioni trovate per I e B_ρ, otteniamo:

$$\mathbf{F} = 2\pi a I \frac{B_0 a}{2L} \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{R}\left(\pi a^2 \frac{B_0}{L}\right)^2 \mathbf{v} \tag{17}$$

in accordo con il calcolo precedente.