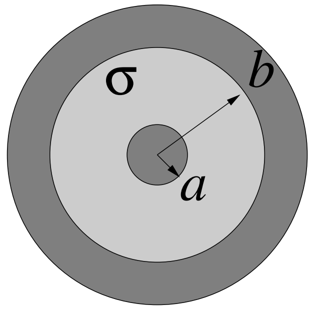
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2005-2006

Compito di Fisica b1A (03/07/2006)

1



Si consideri un sistema formato da due armature conduttrici: un'armatura interna cilindrica di raggio a e lunghezza $\ell \gg a$, e un'armatura esterna a forma di guscio cilindrico di raggio interno $b > a$, coassiale alla prima armatura ed avente stessa lunghezza. Tra le due armature è mantenuta la differenza di potenziale V.
Si supponga che lo spazio tra le armature sia riempito di un mezzo gassoso conduttore avente conducibilità costante ed uniforme σ_0. In condizioni stazionarie, si osserva che tra le armature scorre la corrente I. In tali condizioni, calcolare, trascurando gli effetti di bordo:

a) la densità di corrente $\mathbf{J}$ nello spazio tra le armature;
b) la resistenza fra le armature $R = V/I$.

Si supponga adesso che il mezzo gassoso abbia una conducibilità non uniforme, dipendente dalla distanza r dall'asse del sistema secondo la legge $\sigma(r) = \sigma_a(r/a)^k$. Calcolare, sempre in condizioni stazionarie e trascurando gli effetti di bordo:

c) la resistenza fra le armature, definita come al punto b);
d) il campo elettrico e la densità di carica nello spazio tra le armature.

2

In una regione di spazio esiste un campo magnetico costante $\mathbf{B}$ avente simmetria cilindrica rispetto all'asse z, delle quali è nota la componente lungo z in prossimità dell'origine, $B_z(z) = B_0 z/L$.
a) Si calcoli la componente radiale B_r in prossimità dell'asse z.
Si consideri ora un atomo di polarizzabilità magnetica α, tale cioè che in un campo esterno $\mathbf{B}$ acquista un momento magnetico indotto $\mathbf{m} = \alpha\mathbf{B}$.
b) Si calcoli l'energia potenziale dell'atomo nel campo esterno, in prossimità dell'asse z.
c) Si dica, in funzione del segno di α, se esistono posizioni di equilibrio stabile per l'atomo, e si calcoli la frequenza delle piccole oscillazioni attorno a tali posizioni per spostamenti lungo z o lungo r, supposta nota la massa M dell'atomo.

SOLUZIONI

1

a) Poiché siamo in condizioni stazionarie, la densità di corrente (radiale, per ragioni di simmetria) deve avere divergenza nulla, ovvero il suo flusso sulla superficie laterale di raggio r deve essere costante:

$$2\pi r\ell J_r(r) = I \Rightarrow J_r(r) = \frac{I}{2\pi\ell r} \,.$$

b) Il campo elettrico è dato da $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma$ e il suo integrale di linea da a a b deve essere uguale alla d.d.p. tra le armature:

$$V = \int_a^b E_r(r)dr = \frac{I}{2\pi\ell\sigma_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \,,$$

da cui si ottiene

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\ell\sigma_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) \,.$$

c) Si può considerare ogni guscio cilindrico come un resistore di valore infinitesimo $dR = dR(r)$; ogni resistore é connesso in serie a quelli adiacenti, e quindi si può integrare lungo il raggio per trovare la resistenza totale. Usando il risultato del punto b) si ha

$$dR = \frac{1}{2\pi\ell\sigma(r)}\ln\left(\frac{r+dr}{r}\right) = \frac{dr}{2\pi\ell\sigma(r)r} \,,$$

per cui

$$R = \int_a^b \frac{1}{2\pi\ell\sigma_a}\frac{a^k}{r^{k+1}}dr = \frac{1}{2\pi k\ell\sigma_a}\left(1 - \frac{a^k}{b^k}\right) \,.$$

In alternativa si può procedere calcolando il campo elettrico in funzione di I come al punto d) successivo e usando come al punto b) il vincolo della d.d.p fissata tra le armature per ottenere la relazione tra I e V e da qui ottenere R.

d) Poiché le condizioni sono sempre stazionarie si ha ancora $J_r = I/(2\pi\ell r)$ e inoltre $J_r = \sigma E_r = \sigma(r)E_r$. Utilizzando anche il risultato del punto c) per eliminare I ricaviamo per E_r

$$E_r = \frac{I}{2\pi\ell\sigma_a}\frac{a^k}{r^{k+1}} = \frac{kV}{\left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k}\right)r^{k+1}} \,.$$

La densità di carica è

$$\rho = \epsilon_0\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \frac{\epsilon_0}{r}\partial_r(rE_r) = -\frac{\epsilon_0 kV}{\left(\frac{1}{a^k} - \frac{1}{b^k}\right)r^{k+2}} \,.$$

2

a) Poiché deve essere $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$, e $B_r(r=0)=0$,

$$\frac{1}{r}\partial_r(rB_r)+\partial_z B_z=0 \Rightarrow B_r=-B_0\frac{r}{2L}\,,$$

come si può ottenere anche applicando il teorema di Gauss ad una piccola superficie cilindrica coassiale con l'asse z:

$$2\pi r\Delta z B_r(r)+[B_z(z+\Delta z)-B_z(z)]\pi r^2=0 \Rightarrow B_r=-B_0\frac{r}{2L}\,.$$

b) L'energia di interazione fra campo e atomo con dipolo indotto è data da

$$U=-\frac{1}{2}\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}=-\frac{\alpha}{2}B^2=-\frac{\alpha B_0^2}{2L^2}\left(z^2+\frac{r^2}{4}\right)\,.$$

c) L'energia potenziale U ha un minimo nell'origine se $\alpha<0$ (atomo diamagnetico). La forza è

$$\mathbf{F}=-\boldsymbol{\nabla}U=-|\alpha|\frac{B_0^2}{L^2}\left(z\hat{\mathbf{z}}+\frac{r}{4}\hat{\mathbf{r}}\right)\,.$$

La forza è di tipo elastico per spostamenti sia lungo $\hat{\mathbf{z}}$ che $\hat{\mathbf{r}}$, e le frequenze valgono rispettivamente

$$\omega_z=\sqrt{\frac{|\alpha|B_0^2}{ML^2}}\,,\qquad \omega_r=\sqrt{\frac{|\alpha|B_0^2}{4ML^2}}\,.$$