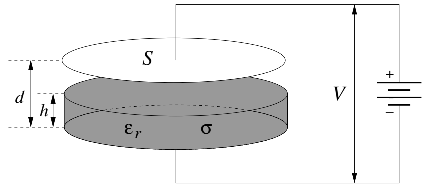
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2006-2007

Compito di Fisica B1/A-B (02/07/2007)

1



Per variare la capacità di un condensatore ad armature piane parallele, aventi area S e poste a distanza d, lo si riempie di un liquido avente permittività dielettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ per un'altezza $h < d$.

a) Calcolare la capacità C del condensatore in funzione di h.

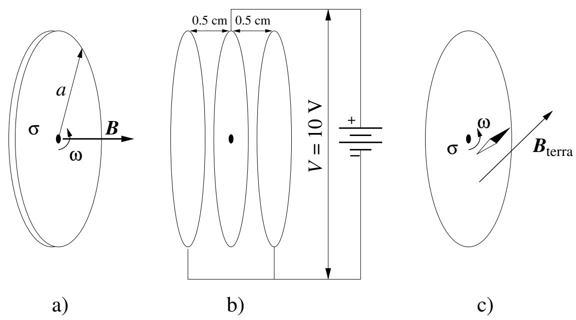
Si supponga che il liquido abbia una resistività molto alta ma finita ρ. Dall'istante $t = 0$ tra le armature del condensatore è mantenuta una differenza di potenziale costante V.
Si osserva che per $t > 0$ la carica Q sulle armature varia lentamente nel tempo, ed a tempi sufficientemente lunghi la situazione diviene stazionaria (cioè $dQ/dt = 0$).

b) Quanto vale il campo elettrico nel liquido e nella regione di vuoto in condizioni stazionarie?

c) Quanto vale la carica Q sulle armature in condizioni stazionarie? Quanto valgono la densità di carica libera e di polarizzazione sulla superficie del liquido nelle stesse condizioni?

d) (*Facoltativo*) Determinare la legge temporale ed il tempo caratteristico con cui Q decresce nel tempo.

2



Nell'esperimento di Rowland (1876), finalizzato a dimostrare che cariche in moto possono generare campi magnetici analogamente alle correnti, un disco conduttore di raggio a e spessore $\ll a$, elettricamente carico, è mantenuto in rotazione con periodo $T = 2\pi/\omega$.

a) Se su ciascuna superficie del disco è presente una carica superficiale uniforme σ, determinare il campo magnetico B generato al centro del disco (si trascurino gli effetti di bordo).

Per caricare elettricamente il disco esso è posto tra due armature metalliche piane parallele] vedi fig.b)]; la spaziatura tra disco e armature è 0.5 cm e tra esse è mantenuta una tensione costante di 10 V. Si assuma $a = 10$ cm e $T = 10^{-2}$ sec.

b) Si calcoli la densità di carica superficiale σ e si dia il valore corrispondente di B.

c) Si cerca di misurare il campo B dalla rotazione indotta in un ago magnetico posto vicino al centro del disco, in presenza del campo magnetico terrestre $B_T \simeq 0.5 \times 10^{-4}$ Tesla orientato parallelamente al piano del disco. Di quanto ruota l'ago?

d) Si supponga di porre una piccola spira di raggio b e resistenza R vicino al centro del disco. Il disco viene arrestato di colpo e, mediante un galvanometro balistico, si ossserva che nella spira è fluita una carica q. Si esprima q in funzione di B.

1

a) Sia $\sigma = Q/S$ la densità di carica superficiale sulla armatura non a contatto col liquido. Siano E_1 e E_2 i valori del campo elettrico nella regione di vuoto e nella regione riempita dal liquido, rispettivamente. Se tra le armature è mantenuta una tensione V, dalle relazioni

$$V = E_1(d-h) + E_2 h, \qquad \epsilon_0 E_1 = \sigma, \qquad \epsilon E_2 = \epsilon_0 E_1 \tag{1}$$

si ottiene per la capacità

$$C = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \frac{S}{(d-h) + h/\epsilon_r}. \tag{2}$$

Questo risultato si poteva ottenere anche considerando la serie di due condensatori di capacità $C_1 = \epsilon_0 S/(d-h)$ e $C_2 = \epsilon S/h$.
b) La carica libera si distribuisce sulla superficie del liquido dielettrico in modo che il campo sia nullo all'interno del dielettrico. Nella regione di vuoto si ha ora $E_1 = V/(d-h)$. Usando $E = \sigma'/\epsilon_0$ dove $\sigma' = Q'/S$ si ottiene $Q' = C'V > CV = Q$ dove $C' = \epsilon_0 S/(d-h)$.
c) Durante la fase transiente nel liquido scorre una densità di corrente $J = E_2/\rho$ e la densità di carica libera sulla sua superficie varia secondo l'equazione di continuità $\partial_t \sigma_\epsilon = -J_1$. Per il teorema di Gauss il campo $D = \epsilon E$ ha una discontinuità alla superficie data da σ_ϵ. Le equazioni della fase transiente sono quindi

$$\partial_t \sigma_\epsilon = -E_2/\rho, \qquad \epsilon E_2 - \epsilon_0 E_1 = \sigma_\epsilon, \qquad V = E_1(d-h) + E_2 h, \tag{3}$$

da cui risolvendo per σ_ϵ si ottiene l'equazione

$$\partial_t \sigma_\epsilon = -\frac{1}{\rho\epsilon_0[\epsilon_r + h/(d-h)]}\left(\sigma_\epsilon \frac{\epsilon_0 V}{d-h}\right). \tag{4}$$

La soluzione che soddisfa la condizione iniziale $\sigma(0) = 0$ è

$$\sigma_\epsilon(t) = \frac{\epsilon_0 V}{d-h}\left(e^{-t/\tau} - 1\right), \qquad \tau = \rho\epsilon_0\left(\epsilon_r + \frac{h}{d-h}\right). \tag{5}$$

2

a) Dividiamo il disco in anelli di spessore dr aventi ognuno carica $dq = 2\pi\sigma r dr$. Per effetto della rotazione ogni anello equivale ad una spira di corrente $dI = q/T$ che genera al centro un campo magnetico (perpendicolare al piano del disco) $dB = \mu_0 dI/2r$. Il campo magnetico totale al centro dell'anello è dato dall'integrale

$$B = 2\int_0^a \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{2\pi}{T}\mu_0\sigma, \tag{6}$$

dove il fattore 2 tiene conto del contributo di entrambe le facce del disco.
b) Dalle relazioni $E = V/d$ e $E = \sigma/\epsilon_0$ si trova $\sigma = \epsilon_0 V/d = 2\epsilon_0 \times 10^6$ V/m $= 1.77 \times 10^{-5}$ C/m^2.
c) Dai risultati precedenti si ha

$$B = \frac{2\pi}{T}\mu_0\sigma = \frac{4\pi}{T}\frac{V}{dc^2} = 2.8 \times 10^{-8} \text{ Tesla.} \tag{7}$$

L'angolo di rotazione è dato da $\tan\theta = B/B_T$, da cui

$$\theta \simeq \frac{B}{B_T} = 5.6 \times 10^{-4}\ \text{rad} = 0.032\ \text{deg}. \tag{8}$$

d) Nella spira viene indotta la forza elettromotrice $\mathcal{E} = -d\Phi(B)/dt = -\mu_0\sigma S d\omega/dt$ e quindi la corrente $i = \mathcal{E}/R$. La carica fluita è

$$q = \int i dt = -\frac{\mu_0\sigma S}{R}\omega(0). \tag{9}$$