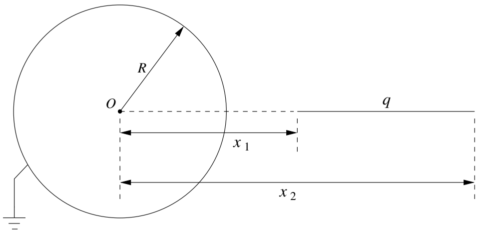
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2007-2008

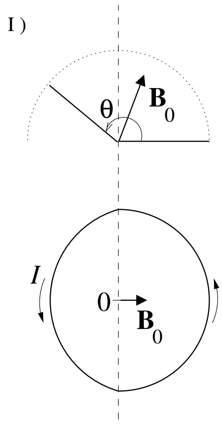
Compito di Fisica B1 (07/07/2008)

1

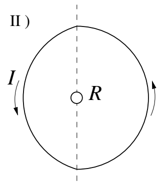


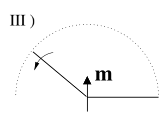
Di fronte ad una sfera conduttrice di raggio R collegata a terra si trova un segmento, disposto come in figura, su cui è uniformemente distribuita una carica q. Gli estremi del segmento distano rispettivamente x_1 e x_2 dal centro della sfera.
a) Risolvere il problema del campo elettrico al di fuori della sfera con il metodo delle immagini. Calcolare la geometria e la distribuzione della carica immagine.
b) Calcolare il valore totale della carica immagine.
c) Dire che cosa cambia se la sfera è isolata e scarica.
d) Adesso facciamo tendere x_2 all'infinito, in modo che la carica reale sia distribuita su di una semiretta con origine in x_1. La densità lineare di carica sulla semiretta sia $\lambda = \lambda_0(R/x)$, con x sempre distanza dal centro della sfera, e λ_0 costante. Calcolare la geometria e la distribuzione della carica immagine in queste condizioni.

2



Un circuito è costituito da due semispire circolari piane (v. figura I) di raggio a, i cui piani formano tra loro un angolo θ.
Si assuma dapprima che nel circuito venga mantenuta la corrente continua I.
a) Dimostrare che il campo magnetico $\mathbf{B}_0$ generato nel punto 0 (centro delle circonferenze) è diretto lungo la bisettrice dell'angolo θ e se ne calcoli l'ampiezza in funzione di θ.
Si supponga ora che le semispire possano ruotare relativamente fra loro attorno all'asse passante per il loro diametro comune. Si pone in 0 una piccola spira circolare di raggio $b \ll a$ e resistenza R (v. fig.II) nel piano di una semispira, mantenendo l'altra in rotazione relativa a velocità angolare costante secondo la legge $\theta = \omega t$. Calcolare
b) la corrente indotta nella spira e il suo andamento temporale,
c) il momento delle forze necessario a mantenere la rotazione.





Si supponga ora che, mantenendo la rotazione a ω costante, il circuito sia disconnesso da ogni generatore di tensione o corrente e che in 0 si trovi un dipolo magnetico costante $\mathbf{m}$ (v. fig.III)
d) Calcolare la forza elettromotrice indotta nel circuito.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) La carica immagine sarà un segmento all'interno della sfera, giacente sulla retta che passa per il centro della sfera e su cui giace la distribuzione di carica reale. Gli estremi del segmento immagine sono $x_2' = R^2/x_2$ (più vicino al centro della sfera) e $x_1' = R^2/x_1$. Il segmento reale ha densità di carica costante $\lambda = q/(x_2 - x_1)$. Ad un tratto dx del segmento reale, con carica $dq = \lambda dx$, e posto a distanza tra x e $x + dx$ dal centro della sfera, corrisponde una carica immagine

$$dq' = -\frac{R}{x}dq = -\frac{R}{x}\lambda dx, \quad \text{distibuita tra} \quad \frac{R^2}{x} - \frac{R^2}{x^2}dx \quad \text{e} \quad \frac{R^2}{x}, \quad \text{quindi} \quad dx' = -\frac{R^2}{x^2}dx. \tag{1}$$

La densità lineare della carica immagine sarà quindi $\lambda' = dq'/|dx'| = -(x/R)\lambda = -(R/x')\lambda$.

b) La carica totale dell'immagine si ottiene integrando λ' sul segmento immagine

$$q' = \int_{x_2'}^{x_1'} \lambda' dx' = -R\lambda \int_{R^2/x_2}^{R^2/x_1} \frac{dx'}{x'} = -R\lambda \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = -q\frac{R}{x_2 - x_1} \log\left(\frac{x_2}{x_1}\right). \tag{2}$$

c) Il segmento immagine adesso è compreso tra il centro della sfera e R^2/x_1. Un tratto infinitesimo di semiretta compreso tra x ed $x + dx$ ha carica

$$dq = \lambda_0 \frac{R}{x}dx, \quad \text{cui corrisponde una carica immagine} \quad dq' = -\lambda_0 \frac{R^2}{x^2}dx, \tag{3}$$

distribuita su di un tratto di lunghezza $dx' = (R^2/x^2)dx$. Quindi la densità immagine vale

$$\lambda' = -\lambda_0 \frac{R^2}{x^2}dx \frac{x^2}{R^2 dx} = -\lambda_0, \quad \text{e la carica immagine totale vale} \quad q' = -\lambda_0 \frac{R^2}{x_1}. \tag{4}$$

2

a) Ogni semispira genera in 0 un campo perpendicolare al proprio piano e il cui valore (per il principio di sovrapposizione) è la metà di quello generato da una spira circolare nel centro, $B_s = \mu_0 I/2a$. I campi generati da ciascuna semispira sono simmetrici rispetto al piano della bisettrice e formano con questa un angolo $\pi/2 - \theta/2$. Quindi il campo risultante è lungo la bisettrice e vale in modulo

$$B_0 = |\mathbf{B}_0| = 2\frac{1}{2}B_s \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2a} \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \frac{\mu_0 I}{2a} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{5}$$

b) Il campo nel centro del circuito ruota formando con la normale alla spira nel centro l'angolo $(\pi - \theta)/2 = (\pi - \omega t)/2$. Il flusso, assumendo il campo uniforme sulla spira date le piccole dimensioni di quest'ultima, vale quindi

$$\Phi = \pi b^2 B_0 \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \pi b^2 \frac{\mu_0 I}{2a} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right). \tag{6}$$

La corrente è data da

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\pi b^2 \mu_0 I}{2aR} \omega \sin \omega t. \tag{7}$$

c) Per calcolare il momento delle forze $\mathbf{M}$ possiamo usare il fatto che la potenza meccanica sviluppata a regime deve essere uguale alla potenza dissipata per effetto Joule nella spira:

$$\mathbf{M} \cdot \boldsymbol{\omega} = M\omega = Ri^2, \tag{8}$$

da cui si ricava

$$M = \frac{\omega}{R} \left(\frac{\pi b^2 \mu_0 I}{2a} \right)^2 \sin^2 \omega t. \tag{9}$$

d) Il campo prodotto da $\mathbf{m}$ è equivalente a quello prodotto da una spira come al punto **b)** tale che $m = \pi b^2 i$. Il flusso generato attraverso le semispire si può scrivere come $\Phi_m = \mathcal{M} i$. Ma per il principio di mutua induzione vale anche $\Phi = \mathcal{M} I$ dove Φ, I sono stati calcolati al punto **b)**, quindi

$$\mathcal{M} = \pi b^2 \frac{\mu_0}{2a} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right). \tag{10}$$

Quindi

$$\Phi_m = \mathcal{M} i = (\pi b^2 i) \frac{\mu_0}{2a} \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) = m \frac{\mu_0}{2a} \sin^2 \left(\frac{\omega t}{2} \right). \tag{11}$$

La f.e.m. indotta è $\mathcal{E}_m = -d\Phi_m/dt$.