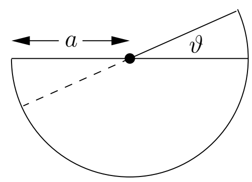
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2008-2009

Compito di Fisica B1 (17/07/2009)

1

Un condensatore piano è formato da due armature semicircolari di raggio a distanti tra loro h, con $h \ll a$. Una lastra di dielettrico, di costante dielettrica relativa ε_r e di volume uguale a quello del condensatore, può ruotare senza attrito attorno al proprio asse, che coincide con l'asse del condensatore. Si consideri la situazione in cui i "diametri" delle armature e della lastra formano un angolo ϑ, e si trascurino gli effetti ai bordi. Supponiamo prima che il condensatore abbia una carica Q. Determinare



a) Il campo elettrico E all'interno del condensatore e la densità di carica superficiale σ.
b) Il momento delle forze sulla lastra.
c) Rispondere alle domande **a)** e **b)** supponendo che le armature siano mantenute ad una differenza di potenziale costante V.

2

Abbiamo un conduttore ohmico cilindrico di raggio a e lunghezza infinita. In esso è presente un campo elettrico uniforme $\vec{E}_0$ parallelo all'asse, e scorre una densità di corrente uniforme $J_0 = \sigma E_0$. E' nota la densità di portatori di carica (elettroni) n. Si supponga che E_0 venga spento istantaneamente all'istante $t = 0$.
a) Secondo quale legge decade la densità di corrente J?
b) Calcolare il campo elettrico E_1 indotto durante il decadimento di J, facendo l'ipotesi (in realtà non troppo realistica!) che sia $E_1 = 0$ sulla superficie del conduttore.
c) Qual è la condizione perché sia $E_1 \ll E_0$? (Rispondere in termini dei parametri noti e della frequenza di plasma del conduttore $\omega_p = \sqrt{ne^2/\varepsilon_0 m_e}$).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) Il condensatore è equivalente a due condensatori in parallelo:

1) C_1, di superficie $S_1 = \dfrac{(\pi - |\vartheta|)a^2}{2}$ e capacità $C_1 = \varepsilon_0\,\varepsilon_r \dfrac{S_1}{h} = \varepsilon_0\,\varepsilon_r \dfrac{(\pi - |\vartheta|)a^2}{2h}$

2) C_2, di superficie $S_2 = \dfrac{|\vartheta|\,a^2}{2}$ e capacità $C_2 = \varepsilon_0 \dfrac{S_2}{h} = \varepsilon_0 \dfrac{|\vartheta|\,a^2}{2h}$

quindi la capacità complessiva vale

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0\,a^2}{2h}\left[\varepsilon_r\pi - |\vartheta|(\varepsilon_r - 1)\right].$$

Il campo elettrico, comune ai due condensatori, è

$$E = \frac{V}{h} = \frac{Q}{Ch} = \frac{2Q}{\varepsilon_0\,a^2\left[\varepsilon_r\pi - |\vartheta|(\varepsilon_r - 1)\right]}.$$

Per le densità superficiali di carica libera abbiamo

$$\sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 = Q, \quad \sigma_1 = \varepsilon_r \sigma_2, \quad \text{da cui} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{\varepsilon_r S_1 + S_2}, \quad \sigma_1 = \frac{\varepsilon_r\,Q}{\varepsilon_r S_1 + S_2}.$$

b) L'energia elettrostatica del condensatore vale

$$U_{es} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2\,h}{\varepsilon_0\,a^2\left[\varepsilon_r\pi - |\vartheta|(\varepsilon_r - 1)\right]}$$

ed il momento Γ vale

$$\begin{aligned}\Gamma = -\frac{\partial U_{es}}{\partial\vartheta} &= -\frac{Q^2\,h}{\varepsilon_0\,a^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\left[\varepsilon_r\pi - \vartheta(\varepsilon_r - 1)\right]^2} \quad \text{per} \quad \vartheta > 0 \\ &= \frac{Q^2\,h}{\varepsilon_0\,a^2}\frac{\varepsilon_r - 1}{\left[\varepsilon_r\pi + \vartheta(\varepsilon_r - 1)\right]^2} \quad \text{per} \quad \vartheta < 0\end{aligned}$$

c) La capacità del condensatore ha la stessa espressione trovata al punto **a)**, e il campo elettrico vale $E = \dfrac{V}{h}$. Per la carica del condensatore abbiamo

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0\,a^2}{2h}\left[\varepsilon_r\pi - |\vartheta|(\varepsilon_r - 1)\right]V, \quad \text{da sostituire nelle} \quad \sigma_2 = \frac{Q}{\varepsilon_r S_1 + S_2}, \quad \sigma_1 = \frac{\varepsilon_r\,Q}{\varepsilon_r S_1 + S_2}.$$

Adesso l'energia elettrostatica vale

$$U_{es} = \frac{1}{2}C\,V^2 = \frac{\varepsilon_0\,a^2}{4h}\left[\varepsilon_r\pi - |\vartheta|(\varepsilon_r - 1)\right]V^2.$$

Il generatore compie un lavoro eguale al doppio della variazione di energia elettrostatica per mantenere V costante rispetto ad una variazione di θ. Quindi per il momento Γ abbiamo

$$\begin{aligned}\Gamma = -\frac{\partial U_{tot}}{\partial\vartheta} = +\frac{\partial U_{es}}{\partial\vartheta} &= -\frac{\varepsilon_0\,a^2}{4h}(\varepsilon_r - 1)\,V^2 \quad \text{per} \quad \vartheta > 0 \\ &= +\frac{\varepsilon_0\,a^2}{4h}(\varepsilon_r - 1)\,V^2 \quad \text{per} \quad \vartheta < 0\end{aligned}$$

2

a) La conduzione può essere schematizzata come un "moto medio" degli elettroni in un mezzo viscoso retto dalla legge

$$m\frac{dv}{dt} = -eE - \gamma v, \quad \text{con velocità a regime} \quad v = -\frac{eE}{\gamma}, \quad \text{da cui} \quad J = n(-e)\left(-\frac{eE}{\gamma}\right) = \frac{ne^2}{\gamma}E$$

quindi $\sigma = ne^2/\gamma$, e $\gamma = ne^2/\sigma$. Per $E = E_0$ abbiamo $v_0 = -\sigma E_0/(ne)$. Se a $t = 0$ il campo viene spento istantaneamente, abbiamo

$$v(t) = v_0\, e^{-\gamma t/m} = v_0\, e^{-ne^2 t/(m\sigma)}, \quad \text{quindi} \quad J(t) = J_0\, e^{-ne^2 t/(m\sigma)}$$

b) La densità di corrente $J(t)$ genera un campo magnetico azimutale $B(t)$ che all'interno del conduttore vale

$$B(t) = \frac{\mu_0\, J(t)}{2}\, r = \frac{\mu_0\, J_0\, e^{-ne^2 t/(m\sigma)}}{2}\, r,$$

per $r \leq a$, dove r è la distanza dall'asse del conduttore. Per $r \geq a$ avremo

$$B(t) = \frac{\mu_0\, a^2 J(t)}{2r} = \frac{\mu_0\, a^2 J_0\, e^{-ne^2 t/(m\sigma)}}{2r}.$$

$B(t)$, variando nel tempo, induce a sua volta un campo elettrico $E_1(t)$ per la terza equazione di Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Avendo $\vec{B}$ solo la componente φ, che dipende solo da r, $\vec{E}$ avrà solo la componente z, e, all'interno del conduttore ($r \leq a$), sarà

$$\frac{\partial E_z}{\partial r} = \frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = -\frac{ne^2}{m\sigma}\, \frac{\mu_0\, J_0\, e^{-ne^2 t/(m\sigma)}}{2}\, r.$$

Utilizzando l'ipotesi $E_1(r = a) = 0$, applicando la relazione $\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times E_1) \cdot d\vec{S}$ ad un rettangolo interno al conduttore, giacente su un piano passante per l'asse, con due lati lunghi l paralleli all'asse stesso, di cui uno sulla superficie del conduttore, otteniamo

$$E_1(r')\, l = -l\, \frac{ne^2}{m\sigma}\, \frac{\mu_0\, J_0\, e^{-ne^2 t/(m\sigma)}}{2} \int_{r'}^{a} r'\, dr',$$

da cui

$$E_1(r) = \frac{ne^2}{m}\, \frac{\mu_0\, E_0\, e^{-ne^2 t/(m\sigma)} (r^2 - a^2)}{4}$$

c) Il minimo di E_1 si ha per $r = 0$, $t = 0$ e vale

$$E_1^{min} = -\frac{ne^2}{m}\, \frac{\mu_0\, E_0\, a^2}{4} = -\frac{ne^2}{\varepsilon_0 m}\, \frac{E_0\, a^2}{4c^2} = -\frac{\omega_p^2 a^2}{4c^2} E_0.$$

Quindi $|E_1| \ll |E_0|$ se $\omega_p^2 \ll (2c/a)^2$.