Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2005-2006

Compito di Fisica b1A (**/09/2006)

1

Nel modello di Drude per la conduzione elettrica, si assume che gli elettroni in un metallo siano sottoposti ad una forza viscosa proporzionale e opposta alla velocità. L'equazione del moto degli elettroni ha quindi la forma

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - m\nu\mathbf{v}\,, \tag{1}$$

dove $\mathbf{F}$ è la forza esterna.
a) Si mostri che dalla (1) in condizioni stazionarie ($d\mathbf{v}/dt = 0$) segue la legge di Ohm $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ e si esprima la conducibilità σ in funzione del parametro ν e della densità n degli elettroni di conduzione. Si stimi numericamente ν per il rame ($\sigma \simeq 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$, $n = 8.5 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$).

L'esperimento di Tolman-Stewart (1917), concepito per mostrare che la conduzione nei metalli è dovuta agli elettroni, può essere schematizzato come segue. Un anello di metallo avente raggio a viene posto in rotazione attorno al sua asse con velocità angolare ω. Si assume che l'anello abbia una sezione S di valore finito ma che il suo spessore sia molto piccolo rispetto al raggio, cosí che l'eventuale moto radiale dei portatori di carica è trascurabile.

Al tempo $t = 0$ la rotazione viene arrestata instantaneamente. Per $t > 0$ si osserva il passaggio nell'anello di una corrente $I = I(t)$.
b) Partendo dalla (1) si determini $I(t)$, specificandone il valore massimo I_0 e il tempo caratteristico di variazione τ.
c) Si calcoli il valore totale della carica che scorre nell'anello da $t = 0$ a $t = \infty$ in funzione di σ.
Per rivelare il segnale di corrente si pone una spira di raggio $b \ll a$ al centro dell'anello.
d) Si calcoli il campo magnetico al centro dell'anello e la forza elettromotrice indotta nella spira.

2

Si consideri un modello classico dell'atomo di idrogeno nel quale l'elettrone, avente carica $-e$ e massa m_e, ruota attorno ad un protone di carica $+e$ percorrendo un'orbita circolare di raggio $a_0 = 0.53 \times 10^{-10}$ m. (Per tutte le risposte seguenti si dia *anche* una stima numerica.)
a) Si calcolino la velocità orbitale, il periodo e l'energia totale dell'elettrone sull'orbita in esame, considerando la sola attrazione elettrostatica.
b) Si stimi il campo magnetico $\mathbf{B}$ generato dal moto dell'elettrone al centro dell'orbita.
c) Il protone ha un momento magnetico $\mu_p = 1.151 \times 10^{-26}$ J/T. Si calcoli per quale orientazione di $\boldsymbol{\mu}_p$, rispetto alla velocità angolare dell'elettrone, l'energia di interazione col campo $\mathbf{B}$ del punto **b)** è minima, e si calcoli tale valore.
d) Assumendo che l'elettrone abbia anch'esso un momento magnetico intrinseco $\mu_e = 9.274 \times 10^{-24}$, si calcoli la forza d'interazione tra i dipoli.

SOLUZIONI

1

a) La condizione $d\mathbf{v}/dt = 0$ nella (1) impone che, in una forza $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ dovuta ad un campo elettrico $\mathbf{E}$ gli elettroni abbiano una velocità costante

$$\mathbf{v} = -\frac{e}{m\nu}\mathbf{E}\,.$$

La corrente è data da $\mathbf{J} = -en\mathbf{v}$, da cui si ricava

$$\mathbf{J} = \frac{ne^2}{m\nu}\mathbf{E} \equiv \sigma\mathbf{E}\,.$$

Numericamente

$$\nu = \frac{ne^2}{m\sigma} = \frac{8.5\times 10^{28}(1.6\times 10^{19})^2}{9.1\times 10^{-31}\times 10^7} \simeq 2.4\times 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}\,.$$

b) Al momento dell'arresto ($t = 0$) gli elettroni possiedono una velocità tangenziale $v_0 = a\omega$. Per $t > 0$ essi vengono frenati dalla forza viscosa. In assenza di forze esterne, la soluzione della (1) è

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-\nu t}\,.$$

Quindi la corrente è

$$I = I_0 e^{-\nu t}\,, \qquad I_0 = -(en_e v_0)S\,,$$

e va a zero esponenzialmente con un tempo di decadimento $\tau = 1/\nu$. Il segno meno indica il fatto che, essendo gli elettroni carichi negativamente, la corrente scorre nel verso opposto alla rotazione dell'anello.
c) La carica totale è

$$Q = \int_0^{infty} I(t)dt = \frac{I_0}{\nu} = -\frac{m}{e}\sigma S v_0\,.$$

Quindi, conoscendo i valori di σ, S e v_0 la misura di Q consente di ricavare e/m.
d) Il campo al centro dell'anello è quello generato al centro di una spira circolare dove scorre la corrente I:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\,.$$

Il flusso sulla spira interna è $\Phi \simeq \pi b^2 B$, quindi la forza elettromotrice indotta è

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 \nu I_0 b^2}{2a} e^{-\nu t}\,.$$

2

a) Classicamente, se per descrivere un'orbita circolare di raggio a_0 con velocità v_0, l'elettrone deve essere sottoposto ad una forza centripeta $m_e v_0^2/a_0$. Avremo quindi

$$\frac{m_e v_0^2}{a_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0^2}, \qquad \text{da cui} \quad v_0 = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e a_0}} = 2.188 \times 10^6 \text{ m/s}$$

quindi

$$\omega_0 = \frac{v_0}{a_0} = 4.134 \times 10^{16} \text{ rad/s} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1.520 \times 10^{-16} \text{ s}$$

$$U = \frac{1}{2}m_e v_0^2 - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{a_0} = -2.180 \times 10^{-18} \text{ J}$$

b) L'orbita percorsa dall'elettrone può essere considerata equivalente ad una spira di raggio a_0 percorsa dalla corrente $I = e/T_0 = 1.054 \times 10^{-3}$ A. Il campo magnetico B_0 al centro della spira vale

$$B = \frac{\mu_0 I}{2a_0} = 12.513 \text{ T},$$

ed è antiparallelo ad $\vec{\omega}_0$ dato che la carica dell'elettrone è negativa.

c) L'energia potenziale di un dipolo in campo magnetico vale $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$, quindi nel nostro caso ($\mu_p = 1.151 \times 10^{-26}$ J/T) il valore minimo è

$$U = -\vec{\mu}_p \vec{B}_0 = -1.440 \times 10^{-25} \text{ J}.$$

d) Il campo magnetico generato da un dipolo vale

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(3\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{r}}{r^5}\vec{r} - \frac{\vec{\mu}}{r^3}\right),$$

quindi il campo magnetico generato dal momento magnetico del protone sul piano dell'orbita vale

$$\vec{B}_p = -\frac{\mu_0 \vec{\mu}_p}{4\pi r^3},$$

dove qui r è la distanza dal protone sul piano dell'orbita, e $\vec{B}_p$ e' perpendicolare al piano stesso. L'energia d'interazione con il momento magnetico dell'elettrone vale $U = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}_p$, dove $\mu_e = 9.274 \times 10^{-24}$ J/T, quindi

$$U = \frac{\mu_0 \mu_e \mu_p}{4\pi a_0^3} = 7.202 \times 10^{-26} \text{ J}.$$

La forza è $\vec{f} = -\vec{\nabla} U$, quindi

$$f_r = -\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{3\mu_0 \mu_e \mu_p}{4\pi a_0^4} = 4.083 \times 10^{-15} \text{ N}.$$