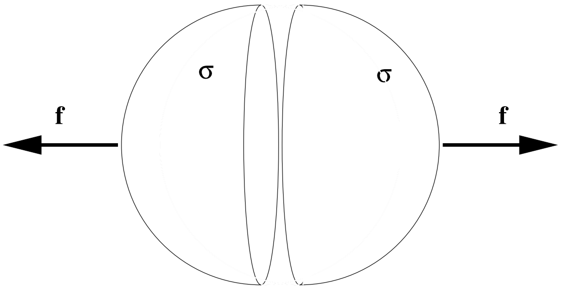
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2006-2007

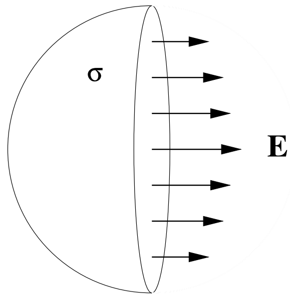
Compito di Fisica B1/A-B (17/09/2007)

1

Un carica Q è uniformemente distribuita su un guscio sferico di raggio a e spessore trascurabile.
a) Calcolare il campo elettrico in *tutto* lo spazio e l'energia elettrostatica.
b) Calcolare la pressione sulla superficie del guscio.



domanda 1–c)

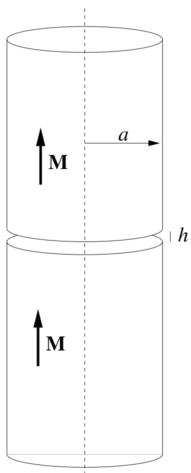


domanda 1–d)

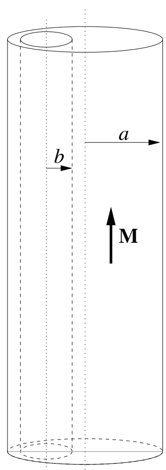
c) Si immagini di "tagliare" il guscio lungo l'equatore; che forza bisogna esercitare per separare le due metà?
d) Si consideri ora il solo campo di un semiguscio: dimostrare, usando il principio di sovrapposizione, che il campo in un qualsiasi punto del piano di sezione è perpendicolare al piano stesso.

2

Un cilindro pieno di raggio a e lunghezza molto maggiore di a possiede una magnetizzazione permanente $\mathbf{M}$ parallela al suo asse. Si "taglia" via dal cilindro una "fetta" trasversale di spessore $h \ll a$.
a) Trascurando dapprima gli effetti di bordo, si assuma che il campo sia uniforme sia all'interno delle due metà del cilindro che nella regione interstiziale tra le due metà. Sotto tale ipotesi, calcolare il campo magnetico nella regione interstiziale tra le due metà del cilindro magnetizzato,
b) Si vogliono ora stimare le deviazioni dal risultato del punto **a)** indotte dagli effetti di bordo. Usando il principio di sovrapposizione, calcolare il campo $\mathbf{B}_0$ sull'asse del cilindro al centro della regione di interstizione, all'ordine più basso in h/a, ed il campo $\mathbf{B}_1$ sull'asse del cilindro a distanza $d \gg h/2$.



domanda 2–a,b)



domanda 2–c)

Si consideri adesso un lungo cilindro uniformemente magnetizzato, avente al proprio interno una cavità cilindrica di raggio minore, il cui asse è parallelo all'asse del cilindro.
c) Calcolare il campo magnetico nel cilindro, sia nella regione magnetizzata che all'interno della cavità.

1

a)
Il campo è radiale e vale in modulo ($k_0 = 1/4\pi\epsilon_0$)

$$E(r) = \begin{cases} k_0 Q/r^2 & (r > a), \\ 0 & (r < a). \end{cases} \tag{1}$$

L'energia elettrostatica è data da

$$U_{es} = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}(k_0 Q^2) \int_a^\infty \frac{1}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \tag{2}$$

b) La pressione elettrostatica è data da $P = \sigma E_a/2$, dove $\sigma = Q/4\pi a^2$ è la densità di carica superficiale e $E_a = k_0 Q/a^2$ è il campo sulla superficie esterna. Quindi

$$P = \frac{1}{2}\sigma E_a = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi a^2}\right)^2. \tag{3}$$

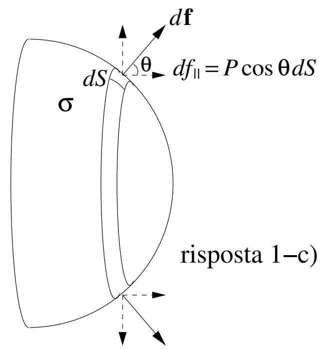
Alternativamente la pressione è data da

$$P = -\frac{1}{S}\frac{\partial U_{es}}{\partial a} = -\frac{1}{4\pi a^2}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}\right) = \frac{1}{2\epsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi a^2}\right)^2. \tag{4}$$

c)

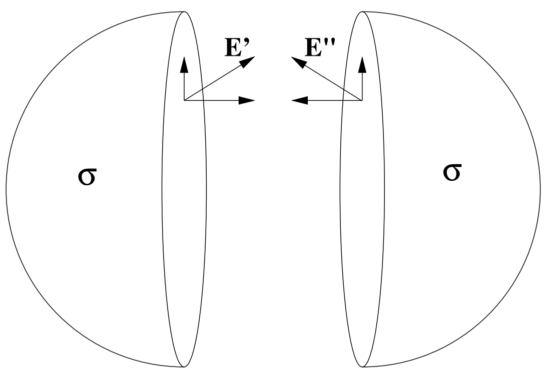
Per simmetria la forza è diretta ortogonalmente alla sezione. Per calcolarla integriamo la componente in tale direzione della forza elettrostatica sulla superficie, $dF = P\cos\theta dS$, su metà del guscio:

$$\begin{aligned} F &= \int P\cos\theta dS = \int_0^{\pi/2} P\cos\theta 2\pi a^2 \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{4\pi a}\right)^2. \end{aligned} \tag{5}$$



risposta 1–c)

d)
Supponiamo che in un punto p del piano di sezione il campo del semiguscio sia $\mathbf{E}'_p = (E'_\perp, E'_\parallel)$, dove le due componenti sono rispettivamente perpendicolari e parallele al piano. Un secondo semiguscio in posizione simmetrica per riflessione rispetto al piano genera nel punto p un campo $\mathbf{E}''_p = (-E'_\perp, E'_\parallel)$. Sommando questi due campi si ottiene il campo all'interno del guscio completo, cioè un campo nullo: $\mathbf{E}'_p + \mathbf{E}''_p = \mathbf{0}$. Segue che $E'_\parallel = 0$, quindi è non nulla solo la componente $E'_\perp$.



risposta 1–d)

2

a) Un lungo cilindro magnetizzato uniformemente è equivaente ad un solenoide con una corrente superficiale $j_s = nI = M$. IL campo al suo interno è quindi uniforme e vale $B = \mu_0 M$. La componente di $\mathbf{B}$ perpendicolare ad una superficie di separazione tra due mezzi è continua, quindi nelle ipotesi di campo uniforme ed effetti di bordo trascurabili, il campo nell'interstizio vale anch'esso $B_0 = \mu_0 M$.
b) Il campo al centro dell'interstizio si può calcolare sottraendo al campo del solenoide infinito il campo generato dalla sottile fetta mancante. Quest'ultimo è approssimabile, se $h \ll a$, col campo di una spira di raggio a nella quale scorre una intensità di corrente $I = jh = Mh$. Al centro si ha allora

$$B_0 = \mu_0 M - \mu_0 \frac{I}{2a} = \mu_0 M \left(1 - \frac{h}{2a}\right). \tag{6}$$

A distanze $d \gg a$ il campo è quello di un dipolo di modulo $m = M(\pi a^2 h)$, quindi

$$B_1 = \mu_0 M - \mu_0 \frac{m}{2\pi d^3} = \mu_0 M \left(1 - \frac{a^2 h}{2d^3}\right). \tag{7}$$

c) Sfruttando gli stessi ragionamenti dei punti **a)** e **b)**, il campo magnetico è equivalente a quello generato da due solenoidi paralleli nei quali scorre la stessa corrente superficiale $nI = M$, ma in versi opposti. Ogni solenoide genera il campo $\pm\mu_0 nI$ al suo interno (con segno dipendente dal verso) e nullo all'esterno nell'approssimazione di lunghezza infinita. Sommando i due contributi si trova quindi che il campo vale $\mu_0 nI$ nella regione riempita dal materiale ed è nullo nella cavità.