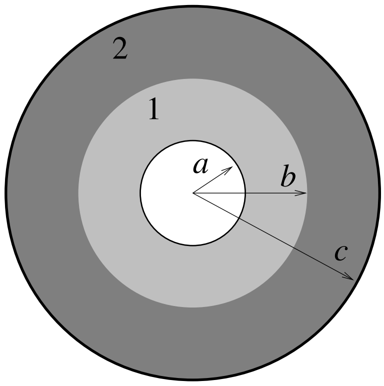
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2007-2008

Compito di Fisica B1 (15/09/2008)

1



Si consideri un condensatore sferico le cui armature metalliche interna ed esterna hanno raggi rispettivamente a e $c > a$. Lo spazio interno è riempito da un materiale dielettrico di permittività assoluta ε_1 per $a < r < b$ (regione 1) e da un materiale di permittività ε_2 per $b < r < c$ (regione 2).
a) Calcolare la capacità del condensatore.
Si supponga ora che i due materiali abbiano anche delle resistività finite ρ_1 e ρ_2, rispettivamente nelle regioni 1 e 2. Tra le due armature si mantiene la differenza di potenziale costante V.
Determinare, in condizioni *stazionarie*,
b) l'intensità di corrente che scorre tra le armature.
c) il campo elettrico nelle regioni 1 e 2 e la densità superficiale di carica *libera* sulle armature e sulla superficie di separazione tra le regioni 1 e 2.

d) Se il condensatore è sconnesso istantaneamente dal generatore di tensione, determinare con quale tempo caratteristico si scarica.

2

Sia data una spira piana di raggio a, percorsa dalla corrente i, posta a distanza $b \gg a$ dalla superficie di un materiale superconduttore (che riempie uniformemente il semispazio $x > 0$) e parallela alla superficie stessa. Com'è noto all'interno del superconduttore i campi magnetici sono rigorosamente nulli.

Determinare
a) la componente del campo **B** totale ortogonale alla superficie del superconduttore,
b) il valore del campo **B** in ogni punto dello spazio,
c) la forza agente sulla spira.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) Il sistema è equivalente a due condensatori sferici in serie, di capacità rispettivamente

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_1 \frac{ab}{b-a}, \quad C_2 = 4\pi\varepsilon_2 \frac{bc}{c-b}$$

quindi la capacità complessiva vale

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_1\varepsilon_2 abc}{\varepsilon_2 c(b-a) + \varepsilon_1 a(c-b)} \tag{1}$$

b) Preliminarmente notiamo che in condizioni stazionarie la densità di corrente deve avere divergenza nulla ovunque per soddisfare $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial_t \rho_c = 0$ dove ρ_c è la densità di carica d volume. Questo implica che $J \propto 1/r^2$ e che J è continua alla superficie di separazione tra le regioni 1 e 2. Sono quindi ben definite l'intensità di corrente continua I e la resistenza R:

$$I = 4\pi r^2 J, \qquad R = \frac{V}{I}. \tag{2}$$

La resistenza di un guscio sferico di raggio interno a ed esterno b con conducibilità ρ_1 si può ottenere integrando tra a e b le resistenze infinitesime di gusci sferici compresi tra r e $r + dr$.

$$R_1 = \rho_1 \int_a^b \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho_1(b-a)}{4\pi ab}, \quad \text{analogamente otteniamo} \quad R_2 = \frac{\rho_2(c-b)}{4\pi bc}$$

La resistenza interna complessiva del condensatore vale quindi

$$R = R_1 + R_2 = \frac{\rho_1 c(b-a) + \rho_2 a(c-b)}{4\pi abc}$$

e l'intensità di corrente che scorre tra le armature vale

$$I = \frac{V}{R} = \frac{4\pi abcV}{\rho_1 c(b-a) + \rho_2 a(c-b)}, \tag{3}$$

e la densità di corrente J a distanza r dal centro della sfera vale

$$J = \frac{I}{4\pi r^2} = \frac{abcV}{r^2\left[\rho_1 c(b-a) + \rho_2 a(c-b)\right]}$$

Notiamo che la continuità di J alla superficie di separazione tra 1 e 2 implica la *discontinuità* di E e D alla stessa superficie, sulla quale si trova quindi della carica libera. Poiché il sistema è neutro otteniamo che le cariche libere sulle armature esterne *non* possono essere l'una l'opposta dell'altra: si ha in generale $Q_c \neq -Q_a$, essendo Q_a e Q_c le cariche sulle armature interna ed esterna, rispettivamente. Quindi per il condensatore imperfetto a due strati *non* è più ben definita una capacità totale $C = Q/V$, proprio perché non è possibile decidere "chi è" la carica Q.

c) Con la geometria del problema abbiamo $E = \rho J$, quindi

$$E_1(r) = \frac{\rho_1 abcV}{r^2\left[\rho_1 c(b-a) + \rho_2 a(c-b)\right]}, \quad E_2(r) = \frac{\rho_2 abcV}{r^2\left[\rho_1 c(b-a) + \rho_2 a(c-b)\right]} \tag{4}$$

Si ha inoltre

$$E_1(r) = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_1 r^2}, \quad E_2(r) = \frac{(Q_a + Q_b)}{4\pi\varepsilon_2 r^2} = -\frac{Q_c}{4\pi\varepsilon_2 r^2} \tag{5}$$

essendo $Q_b = -(Q_a + Q_c)$ la carica libera presente sulla superficie tra le regioni 1 e 2. Si ha quindi

$$Q_a = \frac{4\pi\varepsilon_1\rho_1 abcV}{[\rho_1 c(b-a) + \rho_2 a(c-b)]}, \quad Q_c = -\frac{4\pi\varepsilon_2\rho_2 abcV}{[\rho_1 c(b-a) + \rho_2 a(c-b)]} \tag{6}$$

La densità di carica libera superficiale σ_b alla superficie di separazione $r = b$ si può ottenere dal teorema di Gauss come

$$\sigma_b = \varepsilon_2 E_2(b) - \varepsilon_1 E_1(b) = \frac{(\varepsilon_2\rho_2 - \varepsilon_1\rho_1)\, acV}{b\,[\rho_1 c(b-a) + \rho_2 a(c-b)]} = -\frac{Q_a + Q_c}{4\pi b^2} \tag{7}$$

d) Durante la scarica la carica libera Q_b deve abbandonare la superficie di separazione fra le regioni 1 e 2. Quindi nella fase stazionaria in generale $J_1 \neq J_2$ ovvero $I_1 \neq I_2$ dove $I_i = 4\pi r^2 J_i$. Usando l'equazione di continuità possiamo scrivere

$$\frac{dQ_b}{dt} = I_1 - I_2 = \frac{1}{4\pi b^2}\left(\frac{Q_a}{\rho_1\varepsilon_1} + \frac{Q_c}{\rho_2\varepsilon_2}\right), \tag{8}$$

dove si sono usate le espressioni (5). Si hanno inoltre le relazioni

$$Q_b = -(Q_a + Q_c), \quad 0 = \frac{Q_a}{\varepsilon_1(b-a)} - \frac{Q_c}{\varepsilon_2(c-b)}. \tag{9}$$

Eliminando Q_a e Q_c si ottiene con un po' d'algebra

$$\frac{dQ_b}{dt} = -\frac{1}{4\pi b^2}\frac{\rho_2(b-a) + \rho_1(c-b)}{\rho_1\rho_2[\varepsilon_2(c-b) + \varepsilon_1(b-a)]} Q_b \equiv -\frac{1}{\tau}Q_b. \tag{10}$$

Il tempo caratteristico di scarica è

$$\tau = 4\pi b^2 \rho_1\rho_2 \frac{\varepsilon_2(c-b) + \varepsilon_1(b-a)}{\rho_2(b-a) + \rho_1(c-b)} \tag{11}$$

2

a) $\mathbf{B}$ deve essere nullo all'interno di un superconduttore. Poiché alla superficie di separazione tra due mezzi la componente ortogonale di $\mathbf{B}$ deve essere continua, sulla superficie avremo $\mathbf{B}_\perp = 0$.

b) Il problema può essere risolto con il metodo delle immagini, ponendo all'interno del superconduttore una spira immagine coassiale con la spira reale, anch'essa di raggio a, posta a distanza b dalla superficie di separazione, e percorsa da corrente $-i$, in modo che i momenti magnetici della spira reale e della spira immagine, ambedue pari in modulo a $\pi a^2 i$, siano opposti. All'interno del superconduttore $\mathbf{B}$ è nullo, al di fuori e a distanza dalla spira $\gg a$, il campo è la somma dei campi di dipolo magnetico dovuti alla spira reale e alla spira immagine.

c) La forza su di un momento magnetico $\mathbf{m}$ posto in campo magnetico $\mathbf{B}$ vale $\mathbf{f} = \nabla(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})$. In approssimazione di dipolo, il campo magnetico generato nel vuoto dalla spira immagine lungo l'asse comune delle due spire vale

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}, \quad \text{dove} \quad m = \pi a^2 i, \quad \text{e } z \text{ è la distanza dal centro della spira immagine.}$$

$\mathbf{B}$ ed il momento magnetico della spira reale sono antiparalleli, la forza è repulsiva e vale in modulo

$$|f_z| = \frac{\mu_0 m^2}{8b^3}. \tag{12}$$