Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2008-2009

Compito di Fisica B1 (07/09/2009)

1

Una carica puntiforme q si trova a distanza x dal centro di un condensatore sferico, le cui armature hanno raggi a e b (con $a < x < b$). Si supponga dapprima che l'armatura di raggio b sia isolata e scarica e che l'armatura di raggio a sia collegata a terra, come in Fig. 1.

a) Determinare la soluzione per il potenziale elettrostatico approssimata all'ordine più basso (non nullo!) in a/x e x/b.

b) Si scriva l'energia potenziale della carica q e si discuta un'eventuale posizione di equilibrio.

c) Si discuta, anche solo qualitativamente, come si può ottenere una soluzione esatta del problema, od un'approssimazione migliore di quella al punto **a)**.

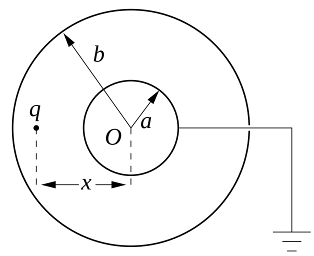

Figura 1:

2

Si consideri il circuito rappresentato in Fig. 2, formato da una circonferenza di raggio a e da due tratti rettilinei coincidenti con due raggi della conferenza; il contatto 1 è fisso, mentre il contatto 2 è strisciante e il raggio corrispondente è mantenuto in rotazione con velocità angolare costante ω.

I due raggi sono fatti di filo metallico di resistenza per unità di lunghezza r_0, mentre la circonferenza è costituita da un filo metallico di resistenza per unità di lunghezza r_1. Il sistema si trova immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B}$, perpendicolare al piano della figura.

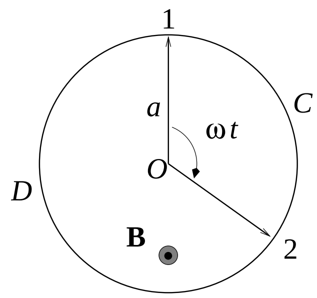

Figura 2:

a) Calcolare le forze elettromotrici indotte presenti nel circuito.

b) Determinare le correnti che circolano nel circuito e il momento delle forze esterne nell'*approssimazione* che sia $r_1 \ll r_0$.

c) Si risponda di nuovo alla domanda **b)** nell'ipotesi che r_1 non sia trascurabile rispetto a r_0.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) All'esterno della sfera conduttrice di raggio b il campo elettrico sarà equivalente a quello generato da una carica q posta al centro comune delle due sfere. All'interno della sfera conduttrice di raggio a il campo elettrico sarà nullo. Nel guscio tra le due sfere, nell'approssimazione all'ordine più basso il campo sarà equivalente a quello generato dalle tre cariche q, q' (immagine generata dalla sfera di raggio b), e q'' (immagine generata dalla sfera di raggio a), poste rispettivamente alle distanze x' e x'' dal centro O, con

$$q' = -q\frac{b}{x}, \quad x' = \frac{b^2}{x}; \qquad q'' = -q\frac{a}{x}, \quad x'' = \frac{a^2}{x}.$$

b) L'energia potenziale della carica q è, all'ordine più basso, la somma delle energie di interazione con le cariche immagine q' e q'':

$$U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{qq'}{x'-x} + \frac{qq''}{x-x''}\right) = -\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b}{b^2-x^2} + \frac{a}{x^2-a^2}\right),$$

dove il fattore 1/2 deriva dal fatto che la carica reale q interagisce con le proprie immagini. Dal grafico di U in Fig. 3 è chiaro che si ha una posizione di *equilibrio instabile* in una certa posizione $x = x_{\text{eq}}$.

Per determinare esplicitamente la posizione d'equilibrio calcoliamo la forza agente sulla carica reale q

$$f = -\frac{dU}{dx} = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{ax}{\left(x^2-a^2\right)^2} - \frac{bx}{\left(b^2-x^2\right)^2}\right]$$

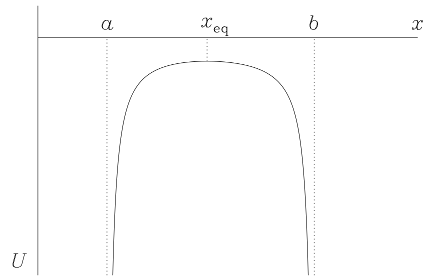

Figura 3:

La forza deve annullarsi per $x = x_{\text{eq}}$. Questo accade per

$$\frac{ax}{\left(x^2-a^2\right)^2} = \frac{bx}{\left(b^2-x^2\right)^2}, \quad \text{da cui} \quad a\left(b^2-x^2\right)^2 = b\left(x^2-a^2\right)^2,$$

estraendo la radice quadrata abbiamo

$$\sqrt{a}\left(b^2-x^2\right) = \sqrt{b}\left(x^2-a^2\right), \quad \text{da cui} \quad b^2\sqrt{a} + a^2\sqrt{b} = x^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right), \quad x^2 = \frac{b^2\sqrt{a}+a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},$$

estraendo nuovamente la radice quadrata otteniamo finalmente

$$x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{b^2\sqrt{a}+a^2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}}\,.$$

c) La soluzione esatta si ottiene aggiungendo l'immagine q''' dell'immagine q' all'interno della sfera di raggio a, e l'immagine q^{iv} dell'immagine q'' all'esterno della sfera di raggio b. Poi le immagini delle immagini delle immagini, e così via.

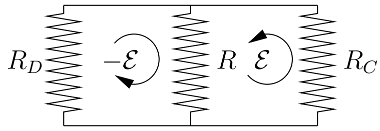

Figura 4:

a) Il circuito equivalente del dispositivo di Fig. 2 è rappresentato in Fig. 4. Abbiamo

$$R = 2\,a\,r_0, \quad R_C = a\,r_1\omega t, \quad R_D = a\,r_1(2\pi - \omega t), \quad \mathcal{E} = -\frac{B\,a^2\omega}{2}.$$

Notare che le forze elettromotrici delle due maglie sono opposte, e
che si ha una singolarità per la forza elettromotrice $\mathcal{E}$ agli istanti $t = 2\pi n/\omega$, con n intero qualunque. Infatti ogni volta che $t = 2\pi n/\omega$ i due raggi sono sovrapposti, e il flusso Φ_C passa istantaneamente dal valore $\pi a^2 B$ a 0, mentre il flusso Φ_D passa da 0 a $\pi a^2 B$.

b) Nell'approssimazone $r_1 \ll r_0$ possiamo trascurare R_C e R_D rispetto a R. Avremo quindi

$$I_C = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{B\,a^2\omega}{2R}, \quad I_D = -\frac{\mathcal{E}}{R} = -I_C = \frac{B\,a^2\omega}{2R}, \quad |I_R| = \frac{B\,a^2\omega}{R},$$

dove I_R è la corrente che circola nei due raggi, e I_C e I_D sono, rispettivamente, le correnti che circolano nelle maglie C e D.

c) In queste condizioni R_C ed R_D non possono essere trascurate rispetto ad R, e dipendono dal tempo secondo le leggi

$$R_C = r_1 a(\omega t \bmod 2\pi), \quad R_D = r_1 a[(2\pi - \omega t) \bmod 2\pi].$$

Avremo quindi

$$I_C = -\frac{B\,a^2\omega}{2[R + r_1 a(\omega t \bmod 2\pi)]}, \quad I_D = \frac{B\,a^2\omega}{2\{R + r_1 a[(2\pi - \omega t) \bmod 2\pi]\}}, \quad |I_R| = |I_C| + |I_D|\,.$$