Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Compito di Fisica B1 (08/09/2010)

1

Una spira conduttrice circolare sottile di massa m e raggio a viene lasciata cadere (da ferma) in presenza della gravità e di un campo magnetico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, z)$ avente simmetria cilindrica rispetto all'asse verticale $\hat{\mathbf{z}}$. La componente del campo lungo l'asse $\hat{\mathbf{z}}$ è nota e vale $B_z = B_0 z/L$. Nella caduta la spira, che ha resistenza R, mantiene il proprio asse parallelo alla direzione del moto. Si trascurino gli effetti di autoinduzione.

Dopo un tempo sufficientemente lungo, si osserva che la spira cade con velocità costante. Determinare:

a) i valori "a regime" della velocità della spira e della corrente indotta dal campo magnetico, utilizzando il bilanciamento delle forze oppure la conservazione dell'energia;

b) la legge oraria del moto della spira, con la quale si raggiunge la velocità a regime determinata al punto **a)**, e l'intensità di corrente al generico istante;

c) la forza radiale per unità di lunghezza della spira, dovuta al campo magnetico, specificando se tale forza tende a dilatare oppure a contrarre la spira parallelamente al suo piano, e perché.

2

Si consideri un cilindro infinito di raggio a, elettricamente carico con densità di carica di volume ρ uniforme ($\varepsilon_r = 1$). Calcolare:

a) il campo elettrico in tutto lo spazio;

b) il potenziale elettrico $\varphi(\mathbf{r})$ in tutto lo spazio (*suggerimento*: si ponga $\varphi(0) = 0$);

c) l'energia elettrostatica per unità di lunghezza del cilindro, utilizzando l'integrale di volume:

$$U_{\text{e.s.}} = \frac{1}{2} \int \rho \varphi d\tau. \tag{1}$$

d) Si considerino ora due cilindri infiniti identici e paralleli, posti a distanza d tra gli assi, con $d \gg 2a$. Calcolare l'energia potenziale del sistema dei due cilindri, per unità di lunghezza.

e) [*Facoltativo.*] Si provi ora a determinare l'energia elettrostatica per unità di lunghezza del cilindro, utilizzando l'integrale di volume alternativo:

$$U'_{\text{e.s.}} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \mathbf{E}^2 d\tau, \tag{2}$$

e si spieghi l'eventuale differenza riscontrata tra questo risultato e quello ottenuto al punto **a)**.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati.*

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell nel vuoto ($\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$)

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}).$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo $d\mathbf{l}$ di corrente I:

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{3}$$

Operatore divergenza in coordinate cilindriche:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z. \tag{4}$$

Identità notevole valida per A campo scalare e $\mathbf{B}$ campo vettoriale:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (A\mathbf{B}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\nabla} A + A\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}. \tag{5}$$

SOLUZIONI

1

a) Primo metodo (equilibrio delle forze). Il flusso magnetico attraverso la spira è uguale a (la componente radiale del campo non contribuisce):

$$\Phi(\mathbf{B}) = B_z \pi a^2 = \pi a^2 \frac{B_0}{L} z(t), \tag{6}$$

dove $z(t)$ indica la posizione (del centro di massa) della spira. Per la legge di Faraday-Neumann, la variazione di flusso induce una corrente lungo la spira pari a:

$$I(t) = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \frac{B_0}{RL} v(t). \tag{7}$$

dove $v(t) = \dot{z}(t)$. La corrente è dunque proporzionale alla velocità: perciò a regime saranno entrambe costanti. Date le approssimazioni connesse alle dimensioni della spira, possiamo considerare per gli elettroni solo il moto lungo la direzione tangenziale. Le forze agenti su un tratto $d\mathbf{l}$ della spira si determinano mediante: $d\mathbf{F} = I(t) d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$. Le forze radiali (dovute alla componente assiale del campo magnetico) hanno ovviamente somma nulla. La forza netta sulla spira è diretta lungo $\hat{\mathbf{z}}$ ed è dovuta alla componente radiale del campo magnetico, calcolata in corrispondenza della spira:

$$\mathbf{F} = \oint_{\text{spira}} I(t) r d\theta B_\rho(\rho = a) \hat{\boldsymbol{\theta}} \times \hat{\mathbf{r}} = -2\pi a I(t) B_\rho(\rho = a) \hat{\mathbf{z}}. \tag{8}$$

La componente B_ρ si determina ricordando che $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$. Scriviamo la divergenza del campo magnetico in coordinate cilindriche:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho B_\rho) + \partial_z B_z, \tag{9}$$

da cui si ricava: $\partial_\rho(\rho B_\rho) = -B_0 \rho / L$, e, integrando opportunamente, $B_\rho(\rho) = -B_0 \rho / 2L$. In definitiva, per la forza abbiamo:

$$\mathbf{F} = 2\pi a I(t) \frac{B_0 a}{2L} \hat{\mathbf{z}} = -\frac{1}{R} \left(\pi a^2 \frac{B_0}{L} \right)^2 v(t) \hat{\mathbf{z}} \equiv -A v(t) \hat{\mathbf{z}}. \tag{10}$$

Si trova che la forza magnetica netta è proporzionale alla velocità risulta sempre diretta in verso opposto, quale che sia il segno di B_0/L. A regime avremo dunque che la forza magnetica è uguale e opposta alla forza peso, perciò:

$$-A v_{\text{reg}} = -(-mg) \quad \Rightarrow \quad v_{\text{reg}} = -\frac{mg}{A}. \tag{11}$$

La corrente a regime, equazione (7), avrà valore:

$$I_{\text{reg}} = \left(\pi a^2 \frac{B_0}{L} \right)^{-1} mg. \tag{12}$$

Il verso della corrente dipende dal segno di B_0/L: se è positivo, la corrente scorre in verso antiorario, altrimenti in verso orario.

Secondo metodo (conservazione dell'energia). La conservazione dell'energia impone che l'energia potenziale "gravitazionale" della spira persa nella caduta in parte si trasformi in energia cinetica e in parte si dissipi in effetto Joule sulla resistenza della spira, con potenza:

$$P_d(t) = R[I(t)]^2 = Av^2(t). \tag{13}$$

A regime, la potenza dissipata è costante e la variazione di energia potenziale compensa la dissipazione (l'energia cinetica è infatti costante):

$$P_d\Big|_{\text{reg}} = -\frac{dU_{\text{pot}}}{dt}\Big|_{\text{reg}} \quad \Rightarrow \quad Av_{\text{reg}}^2 = -mgv_{\text{reg}} \tag{14}$$

da cui si ottiene nuovamente l'equazione (11). La corrente a regime si determina utilizzando l'equazione (13).

b) Al generico istante, le uniche forze in gioco sono il peso e la forza magnetica (10). L'equazione del moto è allora:

$$m\dot{v} = -mg - Av, \tag{15}$$

dove A è la costante definita al punto **b)**, il cui segno è positivo. L'equazione del moto ha soluzione:

$$v(t) = -\frac{mg}{A}\left(1 - e^{-At/m}\right). \tag{16}$$

Si noti che m/A ha correttamente le dimensioni di un tempo. Come sappiamo, a regime la velocità diventa costante: $v_{\text{reg}} = -mg/A$, a prescindere dal segno del campo magnetico. Determiniamo la legge oraria integrando la precedente:

$$z(t) = z_0 - \frac{mg}{A}\left[t + \frac{m}{A}\left(e^{-At/m} - 1\right)\right]. \tag{17}$$

La corrente si determina unendo le equazioni (7) e (16):

$$I(t) = \left(\pi a^2 \frac{B_0}{L}\right)^{-1} mg\left(1 - e^{-At/m}\right). \tag{18}$$

d) Su un tratto dl di spira agisce una forza radiale pari a:

$$d\mathbf{F} = I(t)dl\hat{\boldsymbol{\theta}} \times B_z\hat{\mathbf{z}}. \tag{19}$$

Perciò la forza per unità di lunghezza è data da:

$$\frac{dF}{dl} = \frac{1}{R}\pi a^2 \left(\frac{B_0}{L}\right)^2 z(t)v(t), \tag{20}$$

la cui espressione esplicita si determina per mezzo delle equazioni (16) e (17). In generale la forza per unità di lunghezza è diretta verso l'esterno: infatti le forze generate dalle correnti indotte tendono a compensare la variazione del flusso magnetico (ad esempio se $B_0/L > 0$, nella caduta della spira, il flusso diminuisce e quindi la spira dovrebbe aumentare la sua area per compensare la diminuzione del flusso).

2

a) Per un cilindro infinito con densità di carica uniforme, per ragioni di simmetria il campo elettrico risulta radiale e in modulo dipendente solo da r. Applichiamo il teorema di Gauss a una superficie cilindrica coassiale al cilindro, di raggio r e altezza h. Otteniamo così:

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\mathbf{r}, & 0 \leqslant r \leqslant a, \\ \\ \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{\mathbf{r}}, & r \geqslant a. \end{cases} \tag{21}$$

b) Il potenziale si determina a partire dal campo elettrico noto al punto **a)**, attraverso la formula:

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = -\int_{r_0}^{r} E(r)dr. \tag{22}$$

Integrando i valori precedentemente trovati per il campo elettrico, nella regione $0 \leqslant r \leqslant a$, ponendo $r_0 = 0$, troviamo:

$$\varphi_{\text{in}}(r) = \varphi_{\text{in}}(0) - \frac{\rho r^2}{4\varepsilon_0}, \tag{23}$$

dove si può porre in modo naturale: $\varphi_{\text{in}}(0) = 0$. In tal caso: $\varphi_{\text{in}}(a) = -\rho a^2/(4\varepsilon_0)$. Nella regione $r \geqslant a$, imponendo la continuità sulla superficie cilindrica $r = a$, otteniamo:

$$\varphi_{\text{out}}(r) = \varphi_{\text{out}}(a) - \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\log\left(\frac{r}{a}\right) = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\left[\log\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{2}\right]. \tag{24}$$

Direttamente si può verificare che: $E(r) = -d\varphi/dr$ in tutto lo spazio.

c) Calcoliamo l'energia elettrostatica utilizzando la relazione (1) dove l'integrale di volume è esteso a tutto lo spazio. Dato che si richiede l'energia elettrostatica per unità di lunghezza del cilindro, possiamo limitarci a considerarne un tratto di altezza h. La densità di carica è nulla fuori dal cilindro, perciò otteniamo per quel tratto di cilindro (in coordinate cilindriche: $d\tau = r dr d\theta dz$):

$$U_{\text{e.s.}} = \frac{1}{2}\int_{\text{cilindro}} \rho\varphi d\tau = -\frac{1}{2}\frac{2\pi h\rho^2}{4\varepsilon_0}\int_0^a r^3 dr \tag{25}$$

da cui si ricava che l'energia elettrostatica per unità di lunghezza del cilindro è:

$$\mathcal{U}_{\text{e.s.}} = U_{\text{e.s.}}/h = -\frac{\pi}{16\varepsilon_0}\rho^2 a^4, \tag{26}$$

che ha correttamente le dimensioni di una forza (energia per unità di lunghezza).

d) L'energia potenziale elettrostatica per unità di lunghezza, associata alla coppia di cilindri può essere calcolata con l'integrale (1), ma il calcolo risulta laborioso. Possiamo invece calcolarla semplicemente come la somma di due contributi uguali dovuti ai singoli cilindri, dati dall'equazione (26), e di un contributo di interazione. All'esterno del cilindro, il potenziale è quello di un filo rettilineo infinito con una densità lineare di carica pari a $\lambda = \pi a^2 \rho$; un tratto di filo parallelo h in presenza del filo rettilineo dà un contributo uguale a:

$$U_{\text{int}}(d) = \varphi_{\text{out}}(d)\cdot\lambda h \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_{\text{int}} = \frac{U_{\text{int}}(d)}{h} = -\frac{\pi\rho^2 a^4}{2\varepsilon_0}\left[\log\left(\frac{d}{a}\right) + \frac{1}{2}\right]. \tag{27}$$

Perciò l'energia potenziale per unità di lunghezza è:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_{e.s.}(\text{coppia di cilindri}) &= 2\mathcal{U}_{e.s.} + \mathcal{U}_{\text{int}} \\
&= -\frac{\pi}{8\varepsilon_0}\rho^2 a^4 - \frac{\pi\rho^2 a^4}{2\varepsilon_0}\left[\log\left(\frac{d}{a}\right) + \frac{1}{2}\right] \\
&= -\frac{\pi\rho^2 a^4}{2\varepsilon_0}\left[\log\left(\frac{d}{a}\right) + \frac{3}{4}\right]. \qquad (28)
\end{aligned}$$

Si noti che l'approssimazione $d \gg 2a$ non è necessaria per rispondere alla domanda.

e) Se si utilizza l'equazione (2), distinguendo fra la regione di campo esterna al cilindro e quella interna si ottiene:

$$\begin{aligned}
U_{\text{e.s.}} &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{r \geqslant a} \mathbf{E}^2 d\tau + \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{0 \leqslant r \leqslant a} \mathbf{E}^2 d\tau \qquad (29) \\
&= \frac{1}{2}\varepsilon_0 2\pi h \left(\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\right)^2 \int_a^\infty \frac{1}{r^2} r dr + \frac{1}{2}\varepsilon_0 2\pi h \left(\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\right)^2 \int_0^a r^3 dr, \qquad (30)
\end{aligned}$$

e si nota subito che il primo integrale è divergente. Infatti si deve ricordare che le due equazioni usate per determinare l'energia elettrostatica sono equivalenti a meno di un termine riconducibile, grazie all'identità (5), a:

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int \boldsymbol{\nabla}(\varphi\mathbf{E}) d\tau = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 \int (\varphi\mathbf{E})\hat{\mathbf{n}} dS \qquad (31)$$

(dove si è usato il teorema della divergenza) e l'integrale di flusso ottenuto, eseguito su una superficie cilindrica coassiale al cilindro, è divergente, in quanto dS è di ordine r^2, il campo elettrico è di ordine $1/r$ e il potenziale è logaritmico in r. Perciò non è legittimo utilizzare l'equazione (2) per la distribuzione di carica considerata (che risulta infinita).