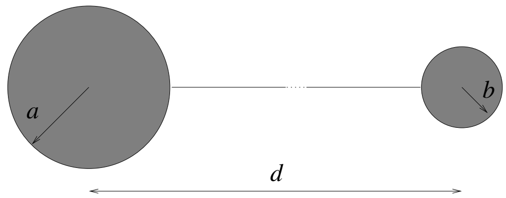
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2006-2007

Compito di Fisica B1/A-B (07/11/2007)

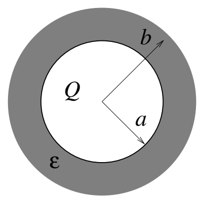
1



Due sfere metalliche, di raggi rispettivamente a e b, con $b < a$, sono collegate da un sottile filo metallico. I centri delle sfere si trovano a distanza $d \gg a > b$. Sul sistema formato da sfere e filo si trova la carica Q.
Nell'approssimazione che il filo abbia capacità trascurabile (ovvero trascurando la carica depositata su esso) e che la densità superficiale di carica su ciascuna sfera sia uniforme, determinare:
a) come si ripartisce la carica Q tra le due sfere,
b) il potenziale V del sistema e la sua "capacità" $C = Q/V$,
c) il campo elettrico alla superficie di ciascuna sfera, confrontandone le intensità e discutendone il limite $b \to 0$.

Si vogliono ora valutare gli effetti di induzione elettrostatica che fanno sì che la densità di carica superficiale non sia uniforme.
d) Si utilizzi il metodo delle cariche immagine per migliorare l'approssimazione dei punti precedenti, calcolando le risposte ai punti a) e b) al primo ordine in a/d ovvero b/d.

2



Una sfera metallica di raggio a possiede la carica libera Q ed è rivestita da uno strato di materiale dielettrico isotropo di spessore $d = b - a$, avente permittività dielettrica relativa uniforme ϵ_r. Determinare:
a) il campo elettrico in tutto lo spazio,
b) le densità di carica di polarizzazione sulle superfici dello strato dielettrico,
c) il potenziale della sfera metallica.

Si assuma ora che la permittività dielettrica relativa nello strato dielettrico $a < r < b$ non sia uniforme ma vari lungo il raggio secondo la legge

$$\epsilon_r(r) = 1 + \chi_a \frac{b-r}{b-a}. \tag{1}$$

Determinare:
d) il campo elettrico in tutto lo spazio,
e) la densità superficiali di carica di polarizzazione sulle superfici dello strato dielettrico,
f) la densità di volume di carica di polarizzazione all'interno dello strato dielettrico.

Può essere utile ricordare che, per un vettore radiale $\mathbf{v} = (v_r, 0, 0)$ in coordinate polari, si ha

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right). \tag{2}$$

SOLUZIONI

1

a) Nelle ipotesi del problema la densità di carica superficiale è approssimativamente uniforme e quindi il potenziale e il campo di ciascuna sfera sono approssimabili (all'esterno di esse) col campo di una carica puntiforme. Dette Q_a e Q_b le cariche su ciascuna sfera, con $Q_a + Q_b = Q$, si ha per i potenziali

$$V_a \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_a}{a}, \qquad V_b \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_b}{b}. \tag{3}$$

Poiché le sfere sono connesse dal filo conduttore deve essere $V_a = V_b \equiv V$. Risolvendo per le cariche

$$Q_a \simeq \frac{Q}{1+b/a}, \qquad Q_b \simeq \frac{Q}{1+a/b}, \tag{4}$$

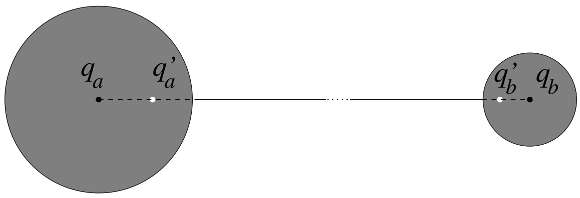
da cui si nota che $Q_b > Q_a$.
b) Dai risultati del punto a) si ottiene

$$V \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a+b}, \qquad C = 4\pi\epsilon_0(a+b). \tag{5}$$

c) Per il campo elettrico otteniamo

$$E_a \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_a}{a^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a(a+b)}, \qquad E_b \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_b}{b^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{b(a+b)}, \tag{6}$$

da cui si ottiene $E_b > E_a$. Nel limite $b \to 0$, E_a è finito mentre E_b diverge.
d)



All'ordine piú basso consideriamo il campo di ciascuna sfera come quello di una carica puntiforme posta nel proprio centro. Siano q_a e q_b i valori (da determinare) di queste cariche. Come è noto dal metodo delle immagini ognuna di queste cariche induce una distribuzione di carica indotta equivalente ad una carica immagine posta all'interno della sfera opposta, sull'asse congiungente la carica col centro. I valori delle cariche immagine (vedi figura) sono dati rispettivamente da

$$q_a' = -q_b\frac{b}{d}, \qquad q_b' = -q_a\frac{a}{d}, \tag{7}$$

e le distanze dal centro della sfera di appartenenza valgono rispettivamente a^2/d e b^2/d. (Ognuna di queste cariche immagine produce a sua volta un effetto di induzione elettrostatica modellizzabile attraverso ulteriori cariche immagine, che forniscono correzioni di ordine superiore).

Poiché la carica totale è Q, deve essere $q_a + q_b + q_a' + q_b' = Q$. Inoltre i potenziali di ciascuna sfera valgono rispettivamente

$$V_a \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_a}{a}, \qquad V_b \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_b}{b}, \tag{8}$$

in quanto per ogni sfera la somma dei contributi al potenziale della carica centrale opposta e della propria carica immagine è zero. Posto $V_a = V_b$, con qualche calcolo si ottiene

$$q_a \simeq \frac{Q}{1+b/a-2b/d}, \qquad q_b \simeq \frac{Q}{1+a/b-2a/d}. \tag{9}$$

2

a) Il problema ha simmetria di rotazione, quindi i campi saranno radiali. Il campo $D = \epsilon_0\epsilon_r E$ risulta perpendicolare alle superfici di discontinuità, è quindi continuo e per il teorema di Gauss vale $D = Q/4\pi r^2$. Otteniamo quindi per il campo elettrico

$$E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \times \begin{cases} 1/\epsilon_r r^2 & (a < r < b), \\ 1/r^2 & (r > b). \end{cases} \tag{10}$$

All'interno della sfera ($r < a$) il campo è nullo.

b) Ad ogni superficie di discontinuità le componente normali del campo elettrico sui lati opposti della superficie sono legate dalla relazione

$$E_2 - E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{11}$$

dove σ è la densità di carica superficiale *totale* (libera e di polarizzazione). All'interfaccia tra la sfera conduttrice e lo strato dielettrico la relazione fornisce

$$\epsilon_0 E(a^+) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r a^2} = \sigma_{p1} + \sigma_{lib}, \tag{12}$$

dove $\sigma_{lib} = Q/4\pi a^2$. Si ottiene allora

$$\sigma_{p1} = \frac{Q}{4\pi a^2}\left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1\right). \tag{13}$$

All'interfaccia esterna tra dielettrico e vuoto si ha

$$\epsilon_0\left[E(b^+) - E(b^-)\right] = \frac{Q}{4\pi b^2}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) = \sigma_{p2}, \tag{14}$$

da cui $\sigma_{p2} = -(b/a)^2\sigma_{p1}$ (la carica totale di polarizzazione è quindi nulla).

c) Integrando rispetto a r l'espressione del campo elettrico si ottiene ($k_0 = 1/4\pi\epsilon_0$)

$$V(r) = \begin{cases} k_0 Q/\epsilon_r r + C & (a < r < b), \\ k_0 Q/r & (r > b). \end{cases} \tag{15}$$

La costante C è determinata dal requisito che il potenziale sia continuo, e vale quindi

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{b}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right). \tag{16}$$

Il potenziale della sfera vale quindi

$$V_s = V(r = a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{\epsilon_r a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{b}\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right). \tag{17}$$

d) Il vettore $D = \epsilon_0\epsilon_r E$ è lo stesso del punto precedente. Il campo non cambia per $r > b$, mentre per $b > r > a$ si ha

$$E = \frac{D}{\epsilon_0\epsilon_r(r)} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\frac{1}{1 + \chi_a\frac{b-r}{b-a}}. \tag{18}$$

La densità superficiale della carica totale si può ottenere dal valore di E alla superficie della sfera:

$$\sigma_{tot} = \epsilon_0 E(a^+) = \frac{Q}{4\pi a^2}\frac{1}{1+\chi_a}, \tag{19}$$

da cui, sottraendo la densità di carica libera, otteniamo la densità superficiale di carica di polarizzazione

$$\sigma_p = \sigma_{tot} - \sigma_{lib} = \sigma_{tot} - \frac{Q}{4\pi a^2} = -\frac{Q}{4\pi a^2}\frac{\chi_a}{1+\chi_a} < 0. \tag{20}$$

La densità superficiale di carica di polarizzazione sulla superficie esterna è invece nulla in quanto $D(b) = \epsilon_0 E(b)$.

f) La densità volumica di cariche di polarizzazione si può ottenere dal teorema di Gauss per $\mathbf{E}$:

$$\rho_p = \epsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \epsilon_0 \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 E) = \frac{Q}{4\pi r^2}\partial_r\left(\frac{1}{1+\chi_a\frac{b-r}{b-a}}\right) = \frac{Q}{4\pi r^2(b-a)}\frac{\chi_a}{\left(1+\chi_a\frac{b-r}{b-a}\right)^2}. \tag{21}$$

La carica totale di polarizzazione (somma delle cariche distribuite sulle superfici e nel volume) deve essere nulla.