Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2008-2009

Compito di Fisica B1 (12/11/2008)

1

Abbiamo un diedro formato da due semipiani conduttori uniti ad angolo retto come nella figura a). Una carica q si trova nel punto di coordinate $x = a$, $y = b$, $z = 0$, come in figura. Calcolare

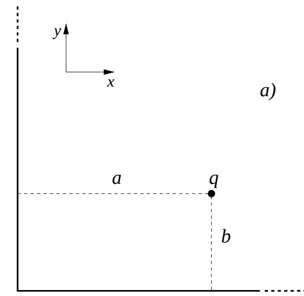
a) il potenziale in tutto lo spazio,

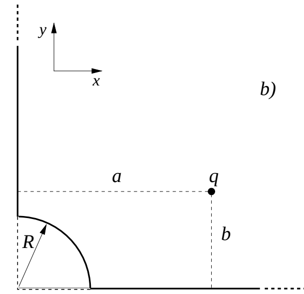
b) la forza che agisce sulla carica,

c) l'energia elettrostatica della configurazione.

Consideriamo adesso il diedro conduttore del caso precedente con una protuberanza sferica, pure conduttrice, di raggio R e centrata in $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, come nella figura b).

d) Calcolare il potenziale in tutto lo spazio e l'energia elettrostatica della configurazione.





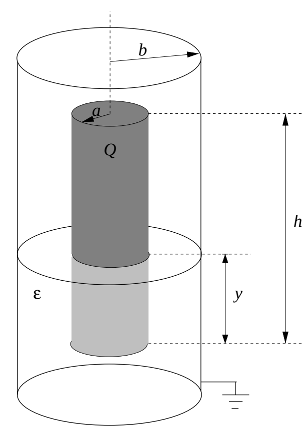
2

Un lungo cilindro conduttore avente raggio a e altezza $h \gg a$ viene immerso per un tratto $y < h$ in un liquido avente permittività dielettrica ε, contenuto in un'armatura conduttrice cilindrica di raggio $b > a$ connessa a terra. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

Si assuma dapprima che il cilindro sia isolato e su di esso sia presente la carica totale Q.

Calcolare **a)** il campo elettrico e la densità di carica superficiale sulla superficie del cilindro, **b)** la forza esercitata sul cilindro.

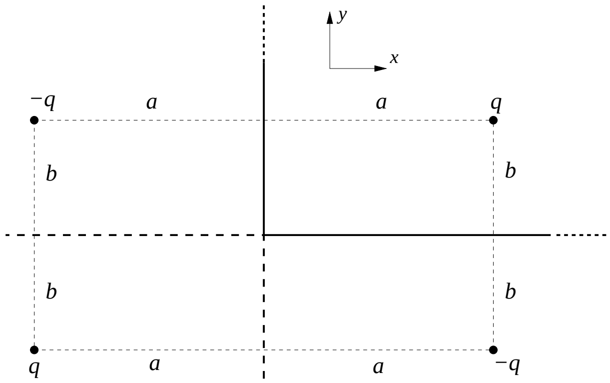
c) Si risponda nuovamente alle domande precedenti se il cilindro non è isolato ma è connesso all'armatura esterna da un generatore che mantiene una differenza di potenziale costante V.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1



a) Il problema viene risolto ponendo 3 cariche immagine come in figura. Il potenziale, per $x, y > 0$ sarà

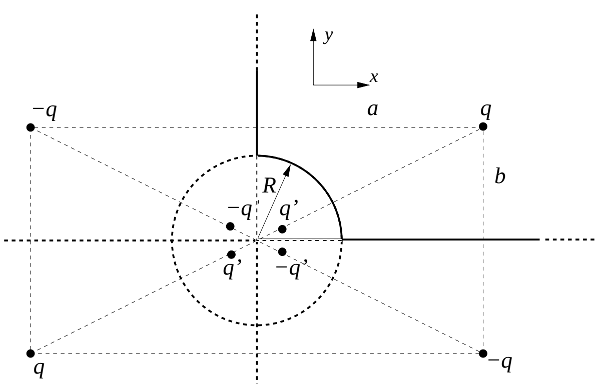
$$
\begin{aligned}
V(x,y,z) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2+z^2}}\right. \\
&\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2+z^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2+z^2}}\right] \qquad (1)
\end{aligned}
$$

b) La forza che agisce sulla carica reale sarà la somma vettoriale delle forze esercitate dalle tre carche immagine.

c) Se le cariche fossero tutte reali l'energia elettrostatica del problema sarebbe

$$U = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{2a} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right]. \qquad (2)$$

Poiché il campo elettrico esiste solo all'interno del diedro, l'energia reale sarà $U/4$.



d) Il problema è risolto dalle cariche immagine in figura, con

$$q' = -\frac{R}{\sqrt{a^2+b^2}}q, \quad \text{distanza delle } q' \text{ dall'origine} \quad r = \frac{R^2}{\sqrt{a^2+b^2}}. \qquad (3)$$

a) Il sistema è equivalente a due condensatori cilindrici in parallelo, di capacità rispettivamente C_1 e C_2, ambedue di raggio interno uguale ad a e raggio esterno uguale a b. Il primo condensatore ha altezza $h-y$ e costante dielettrica tra le armature ε_0, il secondo ha altezza y e costante dielettrica tra le armature ε. Posto $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ e $\chi = \varepsilon_r - 1$, avremo per C_1, C_2 e la capacità complessiva $C = C_1 + C_2$

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon_0(h-y)}{\log(b/a)}, \quad C_2 = \frac{2\pi\varepsilon y}{\log(b/a)}, \quad C = \frac{2\pi[\varepsilon_0(h-y)+\varepsilon y]}{\log(b/a)} = \frac{2\pi\varepsilon_0(h+\chi y)}{\log(b/a)}. \tag{4}$$

La differenza di potenziale tra le armature varrà

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{Q\log(b/a)}{2\pi\varepsilon_0(h+\chi y)}, \tag{5}$$

mentre le cariche sulle due parti del condensatore varranno

$$Q_1 = VC_1 = Q\frac{h-y}{h+\chi y} \quad \text{e} \quad Q_2 = VC_2 = Q\frac{\varepsilon_r\, y}{h+\chi y}, \tag{6}$$

e le densità di carica superficiali sul cilindro

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{2\pi a(h-y)} = \frac{Q}{2\pi a(h+\chi y)} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{Q_2}{2\pi a y} = \frac{\varepsilon_r\, Q}{2\pi a(h+\chi y)} \tag{7}$$

Il campo elettrico alla superficie del cilindro interno vale in modulo

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a(h+\chi y)}. \tag{8}$$

b) L'energia del condensatore vale

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2\log(b/a)}{2\pi\varepsilon_0(h+\chi y)} \quad \text{e la forza} \quad f_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{Q^2\log(b/a)\chi}{2\pi\varepsilon_0\,(h+\chi y)^2}. \tag{9}$$

Il cilindro viene quindi risucchiato nel liquido dielettrico

c) La capacità complessiva del condensatore rimane quella calcolata al punto a). Ma adesso è costante la differenza di potenziale V, quindi avremo per la carica

$$Q = VC = V\frac{2\pi\varepsilon_0(h+\chi y)}{\log(b/a)}, \tag{10}$$

e per le densità superficiali

$$\sigma_1 = \frac{Q}{2\pi a(h+\chi y)} = \frac{V\varepsilon_0}{a\log(b/a)} \quad \text{e} \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_r\, Q}{2\pi a(h+\chi y)} = \frac{V\varepsilon_0\varepsilon_r}{a\log(b/a)}, \tag{11}$$

e il campo elettrico è

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{V}{a\log(b/a)}. \tag{12}$$

Adesso l'energia vale $U = CV^2/2$, e la forza, tenedo conto del lavoro fatto dalla forza elettromotrice, si scrive

$$f_y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{2\pi\varepsilon_0 V^2\chi}{\log(b/a)}. \tag{13}$$