Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Compito di Fisica B1 (04/11/2009)

1

Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è posto a distanza a da un piano conduttore infinito. La direzione del dipolo forma un angolo θ con la normale al piano. Determinare

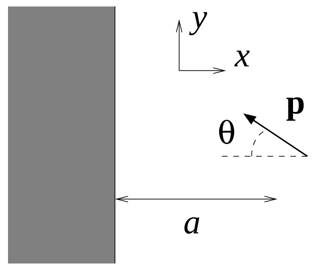

Figura 1

a) il potenziale elettrico in tutto lo spazio,

b) l'energia potenziale del dipolo, in funzione dell'angolo θ e della distanza a del dipolo dal piano.

c) Determinare se, ad a costante, esistono per il dipolo orientazioni di equilibrio, stabile o instabile.

d) Determinare la forza che agisce sul dipolo, supponendo che θ venga mantenuto costante. La forza è attrattiva o repulsiva?

2

Si consideri la distribuzione di carica, con simmetria sferica, schematizzata in figura 2. La carica $+Q$ è distribuita rigidamente e uniformemente sul volume della sfera di raggio a. Una carica opposta $-Q$ è distribuita sulla superficie sferica di raggio $b > a$.

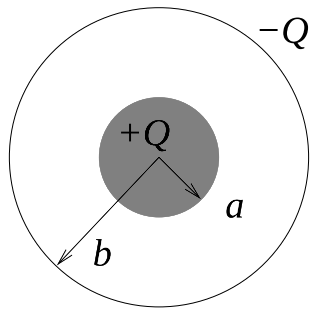

Figura 2

a) Determinare il campo elettrico nelle regioni $0 < r < a$, $a < r < b$ e $r > b$.

b) Calcolare la pressione sul guscio di raggio b.

c) Mostrare che il guscio esterno collassa verso l'interno e calcolare l'energia cinetica acquistata quando il raggio del guscio esterno diviene uguale ad a.

Formule utili

Campo di un dipolo elettrico $\mathbf{p}$

$$\mathbf{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3\hat{\mathbf{r}}(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}) - \mathbf{p}}{r^3} \tag{1}$$

Energia potenziale di un dipolo in un campo esterno $\mathbf{E}_0$

$$U = -\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}_0 \tag{2}$$

Energia elettrostatica di una distribuzione di carica

$$U = \frac{1}{2}\int \rho V d^3x = \int \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 d^3x \tag{3}$$

SOLUZIONI

1

a) Schematizzando il dipolo come due cariche $+q$ e $-q$ separate di uno spostamento $\mathbf{h}$ tale che $\mathbf{p} = q\mathbf{h}$, col metodo delle cariche immagine si ottiene la soluzione come somma del potenziale di $\mathbf{p}$ più quello di un dipolo immagine $\mathbf{p}'$, posto a distanza $-a$ dalla superficie del conduttore, tale che $p'_x = p_x$, $p'_y = -p_y$. La figura 3 illustra la soluzione.

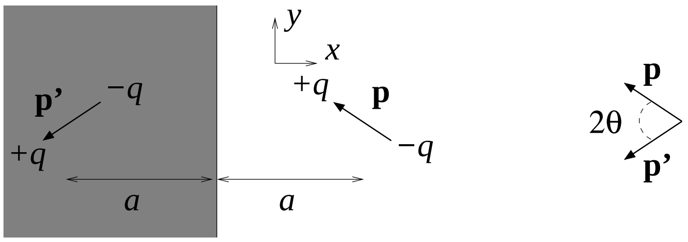

Figura 3

b) Utilizzando la (2), dove per $\mathbf{E}_0$ prendiamo il campo di uno dei due dipoli, otteniamo che l'energia di interazione tra due dipoli generici $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ è data da

$$U_{\mathbf{pp}'} = -\frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}') - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}'}{r^3} \tag{4}$$

dove il fattore 1/2 a secondo membro deriva dal fatto che abbiamo a che fare con un dipolo immagine. Nel nostro caso $r = 2a$, $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p} = \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}' = -p\cos\theta$. Inoltre $\mathbf{p}\cdot\mathbf{p}' = p^2\cos 2\theta$. Si ottiene allora

$$U_{\mathbf{pp}'} = -\frac{p^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1+\cos^2\theta}{8a^3} \tag{5}$$

c) Le orientazioni di equilibrio ad a costante corrispondono a massimi o minimi relativi dell'energia potenziale rispetto a θ. Avremo quindi

$$0 = \frac{\partial U_{\mathbf{pp}'}}{\partial\theta} = \frac{p^2}{64\pi\varepsilon_0}\frac{\sin 2\theta}{a^3}. \tag{6}$$

Le soluzioni con $\theta < 2\pi$ sono $\theta = 0,\ \pi$ (equilibrio stabile) e $\theta = \pi/2,\ 3\pi/2$ (equilibrio instabile): il dipolo tende a disporsi perpendicolarmente alla superficie del conduttore.

d) La forza che agisce sul dipolo, a orientazione costante, è diretta lungo la congiungente i due dipoli ed è data da

$$f = -\frac{\partial U_{\mathbf{pp}'}}{\partial a} = -\frac{3p^2}{64\pi\varepsilon_0}\frac{1+\cos^2\theta}{a^4}. \tag{7}$$

Il dipolo viene quindi attratto dal piano conduttore, con forza massima in modulo per $\theta = 0,\ \pi$, e minima per $\theta = \pi/2,\ 3\pi/2$.

2

a) Usando il teorema di Gauss otteniamo

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q\, r}{4\pi\epsilon_0\, a^3} & (r < a) \\ \\ \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (a < r < b) \\ \\ 0 & (r > b) \end{cases} \tag{8}$$

b) La pressione sul guscio esterno vale

$$p = -\frac{\varepsilon_0}{2} E^2(b^-) \tag{9}$$

(diretta verso il centro)

c) L'energia cinetica è uguale alla variazione di energia elettrostatica

$$K = \Delta U = \int_a^b \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r) 4\pi r^2 dr = \int_a^b \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \tag{10}$$

Questa stessa espressione si può anche ottenere calcolando il lavoro fatto dalla pressione sul guscio esterno

$$L = \int_S \int_b^a dS dr\, p(r) = \int_S \int_a^b dS dr\, \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r) = \int_a^b 4\pi r^2 \frac{\varepsilon_0}{2} E^2(r) dr = \ldots \tag{11}$$