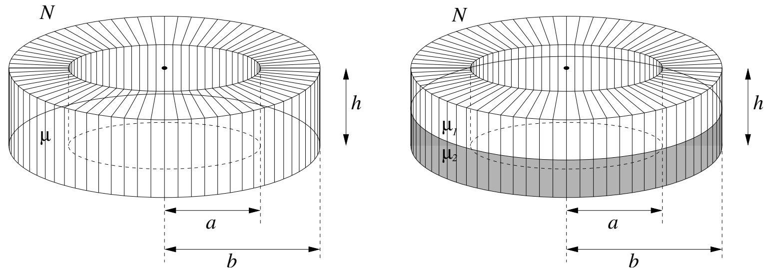
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2007-2008

Compito di Fisica B1/A-B (21/12/2007)

1



Si consideri un toro a sezione rettangolare costituito di materiale di permeabilità magnetica $\mu = \mu_r \mu_0$, avente raggio minore a e raggio maggiore b, sul quale sono avvolte N spire uniformemente distribuite, nelle quali scorre la corrente I.

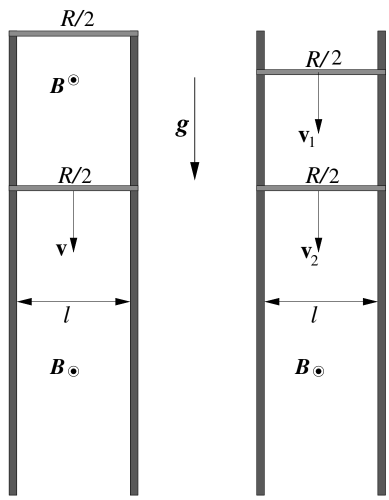
a) Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}$ all'interno e all'esterno del toro (si noti che $\mathbf{B}$ *non* è uniforme all'interno del toro!).

b) Calcolare il coefficiente di autoinduzione L del sistema.

c) Si supponga ora che il toro sia costituito da due tori sovrapposti aventi identica forma e di altezza $h/2$, ma permeabilità diverse μ_1 e μ_2. Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}$ all'interno del toro.

d) Si consideri ora un toro di dimensioni identiche al punto **a)**, costituito da materiale permanentemente magnetizzato, senza alcuna spira di corrente avvolta su esso. Si trovi la distribuzione della magnetizzazione $\mathbf{M}$ che produce lo stesso campo magnetico del punto **a)**.

2



Un circuito a forma rettangolare e resistenza R è posto verticalmente nel campo di gravità $\mathbf{g}$. I due lati orizzontali del circuito, aventi lunghezza ℓ, possono scorrere senza attrito lungo la verticale (mantenendo il contatto elettrico) ed hanno massa M (la variazione della resistenza con la lunghezza effettiva e l'autoinduzione del circuito sono trascurabili). Il sistema si trova in un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B}$ ortogonale al piano del circuito.

Si assuma dapprima che il lato superiore del circuito sia mantenuto nella posizione originaria, mentre il lato inferiore, inizialmente fermo, si mette in movimento a $t = 0$. Sia $v = v(t)$ la sua velocità al tempo t.

a) Si determini l'equazione del moto per $v(t)$ e se ne dia la soluzione con la condizione iniziale $v(0) = 0$, mostrando che per $t \to +\infty$ la velocità assume un valore costante v_d da determinare.

b) Nelle condizioni di velocità costante $v(t) = v_d$ si trovi la potenza dissipata nel circuito per effetto Joule e la potenza meccanica sviluppata dalla forza di gravità.

Si consideri ora il caso in cui entrambi i lati mobili sono lasciati liberi di muoversi al tempo t, con condizioni iniziali $v_1(0) = v_0 \neq 0$ e $v_2(0) = 0$.

c) Determinare le equazioni del moto per le velocità dei due lati mobili $v_1(t)$ e $v_2(t)$ e la loro soluzione, discutendo in particolare l'andamento di $v_1(t)$, $v_2(t)$ e della corrente nel circuito $I(t)$ a tempi lunghi.

SOLUZIONI

1

a) Per simmetria i campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ sono della forma $f(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$, ovvero hanno linee di forza circolari con centro sull'asse del toro. Il campo $H(r)$ si può ottenere eguagliando la sua circuitazione sulla linea di forza di raggio r alla corrente concatenata con essa:

$$2\pi r H(r) = \oint \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l} = I_c(r) \tag{1}$$

Per $r < a$ e $r > b$ si ha $I_c = 0$ e $H = 0$. Per $a < r < b$, si ha $I_c = NI$, e quindi

$$H(r) = \frac{NI}{2\pi r}, \qquad B(r) = \mu H(r) = \mu\frac{NI}{2\pi r}. \tag{2}$$

b) Il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso ciascuna spira è

$$\Phi_1(\mathbf{B}) = \int_{\text{spira}} \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \frac{\mu}{2\pi}\frac{NI}{r} h dr = \frac{\mu h}{2\pi} NI \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{3}$$

Il flusso totale è $\Phi = N\Phi_1 \equiv LI$, quindi

$$L = \frac{\mu h}{2\pi} N^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right). \tag{4}$$

c) Il sistema mantiene la simmetria cilindrica, per cui si può assumere che le linee di forza di $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ abbiano la stessa forma del punto precedente. Inoltre, $\mathbf{H}$ risulta parallelo alla superficie di separazione fra i mezzi, per cui non subisce discontinuità. Poiché le sorgenti di $\mathbf{H}$ sono le correnti libere segue che la sua espressione è la stessa del punto precedente. Invece nei due tori si hanno rispettivamente i campi $\mathbf{B}_1 = \mu_1\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}_2 = \mu_2\mathbf{H}$.
c) Non essendoci correnti libere si ha $\mathbf{H} = 0$ per cui $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{M}$, da cui inserendo l'espressione trovata in **a)** per $\mathbf{B}$ si ricava $\mathbf{M}$.

2

a) La corrente I nel circuito è data da

$$RI = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -B\ell\frac{dy}{dt} = -B\ell v. \tag{5}$$

La forza magnetica sul lato mobile è $\mathbf{F} = -B\ell I\hat{\mathbf{y}}$ e quindi

$$M\frac{dv}{dt} = -Mg - B\ell I = -Mg - \frac{(B\ell)^2}{R}v. \tag{6}$$

La soluzione della (6) con $v(0) = 0$ è

$$v(t) = v_d\left(1 - e^{-t/\tau}\right), \qquad \tau = \frac{MR}{(B\ell)^2}, \qquad v_d = g\tau = \frac{MRg}{(B\ell)^2}. \tag{7}$$

b) La potenza dissipata se $v(t) = v_d$ è

$$P_d = RI^2 = \frac{(B\ell v)^2}{R} = \left(\frac{Mg}{B\ell}\right)^2 R. \tag{8}$$

La potenza meccanica sviluppata dalla forza di gravità è

$$P_m = M\mathbf{g} \cdot \mathbf{v} = Mg\frac{MgR}{(B\ell)^2} = P_d, \tag{9}$$

come previsto dalla conservazione dell'energia.

c) Per la corrente otteniamo adesso

$$RI = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -B\ell\frac{d}{dt}(y_2 - y_1) = -B\ell(v_2 - v_1). \tag{10}$$

Le equazioni del moto sono allora

$$M\frac{dv_1}{dt} = -Mg + \frac{(B\ell)^2}{R}(v_2 - v_1), \qquad M\frac{dv_2}{dt} = -Mg - \frac{(B\ell)^2}{R}(v_2 - v_1), \tag{11}$$

che, sommando e sottraendo, sono riscrivibili nella forma

$$\frac{d}{dt}(v_2 - v_1) = -\frac{1}{\tau}(v_2 - v_1), \qquad \frac{d}{dt}(v_2 + v_1) = -2g, \tag{12}$$

con soluzione

$$v_2 - v_1 = v_0 e^{-t/\tau}, \qquad v_2 + v_1 = v_0 - 2gt, \tag{13}$$

$$v_1 = \frac{v_0}{2}(1 - e^{-t/\tau}) - gt, \qquad v_2 = \frac{v_0}{2}(1 + e^{-t/\tau}) - gt. \tag{14}$$

Per $t \gg \tau$

$$v_1 \simeq v_2 \simeq \frac{v_0}{2} - gt. \tag{15}$$