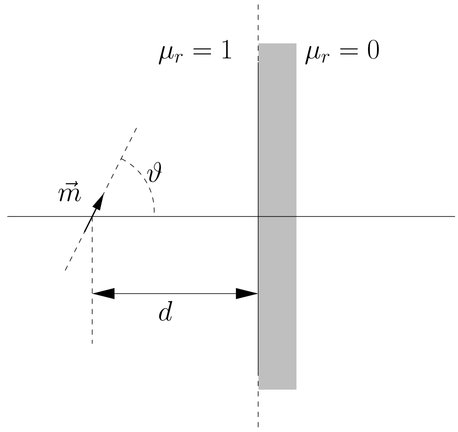
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2008-2009

Compito di Fisica B1 (19/12/2008)

1

Un dipolo magnetico $\mathbf{m}$ si trova nel semispazio $x < 0$ a distanza d dalla superficie piana di un materiale superconduttore, ovvero perfettamente diamagnetico ($\mu_r = 0$) che occupa il semispazio $x > 0$. La direzione del dipolo forma un angolo θ con la perpendicolare alla superficie.

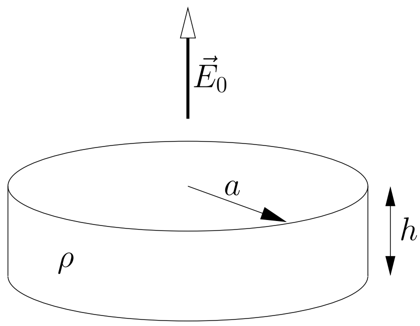


a) Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}$ in tutto lo spazio.
b) Determinare la forza sul dipolo, specificando se attrattiva o repulsiva.
c) Se il dipolo è libero di ruotare nel piano della figura, determinare in quale direzione tende ad orientarsi.
d) (*facoltativo*) Si studi lo stesso problema per un materiale ferromagnetico nel limite $\mu_r \to \infty$.

2

Un conduttore cilindrico di raggio a e altezza $h \ll a$ è immerso in un campo elettrico esterno uniforme E_0, perpendicolare alle basi. La resistività del materiale conduttore è ρ. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

All'istante $t = 0$ il campo esterno viene rimosso istantaneamente.



Calcolare
a) la legge temporale e il tempo caratteristico col quale il campo nel conduttore e la densità di carica superficiale tendono a zero,
b) l'energia dissipata nella scarica.
c) Si mostri che durante la scarica non viene generato alcun campo magnetico, nonostante il passaggio di corrente nel conduttore.

Si consideri ora un conduttore *sferico* di raggio b dello stesso materiale e posto nello stesso campo esterno del caso precedente.
d) Rispondere nuovamente alle domande a) e b) per il conduttore sferico.
e) Mostrare che in questo caso si ha generazione di un campo magnetico e se ne dia l'espressione all'interno del conduttore.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

SOLUZIONI

1

a) Usiamo il metodo delle immagini. Posto un dipolo immagine $\mathbf{m}'$ nella posizione speculare rispetto a $\mathbf{m}$, la condizione al bordo da verificare sulla superficie è $\mathbf{B}_\perp = B_x = 0$ (questa è una condizione sufficiente in quanto essendo $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = 0$, $\mathbf{H}$ può assumere un valore qualsiasi nel superconduttore e quindi non ci preoccupiamo di verificare se $\mathbf{H}_\parallel = 0$). Si ottiene

$$m'_x = -m_x, \qquad m_y = m_y, \tag{1}$$

come si può verificare per componenti, cioè riconducendosi ai casi di dipolo parallelo o perpendicolare al piano.

b) L'energia di interazione tra idue dipoli è

$$U = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left[\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}' - 3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{m})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{m}')\right]. \tag{2}$$

Si ha, essendo $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}$

$$\begin{aligned}\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}' - 3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{m})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{m}') = m_x m'_x + m_y m'_y - 3m_x m'_x &= -m_x^2 + m_y^2 + 3m_x^2 = 2m_x^2 + m_y^2 \\ &= m^2(2\cos^2\theta + \sin^2\theta) = m^2(1+\cos^2\theta).\end{aligned} \tag{3}$$

La forza è

$$\mathbf{F} = -\boldsymbol{\nabla}U = +\frac{\mu_0 m^2}{4\pi r^4}(1+\cos^2\theta)\hat{\mathbf{r}} > 0 \tag{4}$$

ed è sempre repulsiva come ci si doveva attendere.

c) L'energia di interazione ha minimi per $\theta = 0$, $\pi/2$ e θ, come si può verificare dalla sua derivata che è il momento delle forze:

$$|\mathbf{M}| = -\frac{\partial U}{\partial\theta} = \frac{\mu_0 m^2}{2\pi r^3}\sin 2\theta. \tag{5}$$

Di questi punti solo $\theta = \pi/2$ è d'equilibrio stabile. Il dipolo tende quindi a disporsi parallelamente alla superficie.

d) Se $\mu_r \to \infty$ allora deve essere $\mathbf{H} = 0$ nel materiale affinché $\mathbf{B}$ sia finito. Quindi ora la condizione da imporre è $\mathbf{H}_\parallel = 0$, il che si ottiene se $m'_x = m_x$, $m'_y = -m_y$ ovvero invertendo il dipolo immagine al punto precedente. La forza cambia allora di segno (attrattiva) essendo

$$\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}' - 3(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{m})(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{m}') = m_x^2 - m_y^2 - 3m_x^2 = -2m_x^2 - m_y^2 = -m^2(1+3\cos^2\theta) < 0. \tag{6}$$

L'orientazione favortia è quella con $\theta = 0$ o π, cioè col dipolo perpendicolare al piano.

2

a) A $t = 0$ sulle superfici si trova la carica superficiale $\sigma = \pm\epsilon_0 E_0$ la quale genera un campo opposto a E_0. Ad un istante generico t valgono le relazioni

$$\epsilon_0 E = \sigma, \qquad \partial_t\sigma = -J = E/\rho, \tag{7}$$

da cui si ricava $E(t) = -E_0 \exp(-t/\tau)$ con $\tau = \epsilon_0 \rho$.
b)

$$P_d = \int JEd^3x = (E_0^2/\rho)e^{-2t/\tau}(\pi a^2 h), \tag{8}$$

$$U_d = \int_0^\infty P_d dt = (E_0^2/\rho)(\tau/2)(\pi a^2 h) = (\epsilon_0 E_0^2/2)(\pi a^2 h) \tag{9}$$

ovvero è uguale all'energia elettrostatica iniziale.
c) Si ha, tenendo conto della corrente di spostamento

$$J + \epsilon_0 \partial_t E = E/\rho - (\epsilon_0/\tau)E = E/\rho - E/\rho = 0 \tag{10}$$

e quindi il termine di sorgente del campo magnetico è nullo.
d) Per la sfera il campo uniforme E viene prodotto da una distribuzione $\sigma = \sigma_c \cos\theta = 3\epsilon_0 E \cos\theta$. Si ha inoltre $J = E/\rho = -\partial_t \sigma_c$ da cui $E = E_0 \exp(-t/\tau_s)$ con $\tau_s = 3\epsilon_0 \rho$. Inoltre

$$U_d = (E_0^2/\rho)(\tau/2)(4\pi b^2/3) = 3(\epsilon_0 E_0^2/2)(4\pi b^2/3) \tag{11}$$

ed in effetti si può dimostrare che l'energia elettrostatica iniziale è $3(\epsilon_0 E_0^2/2)$ cioè il triplo dell'integrale esteso al solo volume della sfera (il campo – di dipolo – si estende anche all'esterno della sfera).
e) Adesso il termine di sorgente non è nullo

$$J + \epsilon_0 \partial_t E = E/\rho - (\epsilon_0/\tau_s)E = E/\rho - E/3\rho = (2/3)E \tag{12}$$

e quindi $\mathbf{B} \neq 0$. Per simmetria $\mathbf{B}$ ha solo la componente azimutale e dipende solo da r e calcolandone la circuitazione

$$2\pi r B_\phi = (2\mu_0/3)E(\pi r^2), \qquad B_\phi = \mu_0 E_0 (r/3) e^{-t/\tau_s}. \tag{13}$$