Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2009-2010

Compito di Fisica B1 (16/12/2009)

Si scriva chiaramente e *si spieghi brevemente ogni passaggio*; risultati dati senza commento *non* saranno considerati.

1

Un cavo coassiale è schematizzabile come costituito da un conduttore cilindrico interno (schematizzabile come un lungo filo) e da un rivestimento conduttore esterno. Entrambi i conduttori possono essere assunti infinitamente lunghi e di spessore trascurabile.

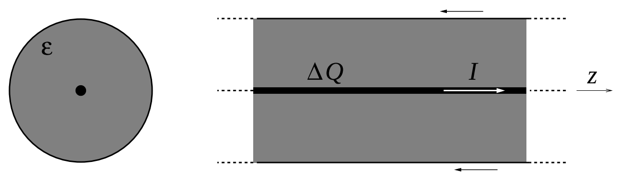

Figura 1

a) Si assuma che su un tratto di filo di lunghezza $\Delta\ell$ siano presenti la carica $\Delta Q = \lambda\Delta\ell$ sul conduttore interno e la carica opposta $-\Delta Q$ sul conduttore esterno. Assumendo che la carica sia uniformemente distribuita, ovvero che la densità di carica per unità di lunghezza $\lambda = \Delta Q/\Delta\ell$ sia uniforme, calcolare il campo elettrico $\mathbf{E}$ in tutto lo spazio assumendo che l'interno del cavo sia riempito da un dielettrico di permittività ε.

b) Si assuma adesso che nei conduttori esterno e interno scorrano rispettivamente le intensità di corrente $\pm I$. Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}$ in tutto lo spazio (per il materiale all'interno del cavo si assuma $\mu = \mu_0$).

c) Si assuma adesso che nel cavo siano presenti entrambi i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ calcolati ai punti **a)** e **b)** e che l'interno del cavo sia vuoto (quindi $\varepsilon = \varepsilon_0$). Lungo il cavo vengono iniettate particelle cariche con velocità $\mathbf{v}$ diretta lungo z. Per quali valori di $\mathbf{v}$ le particelle viaggiano di moto rettilineo uniforme lungo il filo?

2

Il circuito rettangolare in figura 2 ha due lati mobili (1 e 2) di lunghezza a e massa m che possono scorrere senza attrito lungo due guide fisse. La resistenza del circuito è R ed costante. Un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B}$ è perpendicolare alla superficie del circuito. Siano $X_1 = X_1(t)$, $X_2 = X_2(t)$ le posizioni dei lati all'istante t e $V_i = dX_i/dt$ le rispettive velocità.

a) Scrivere la corrente I nel circuito in funzione di V_1 e V_2.

b) Determinare le equazioni del moto per i due lati.

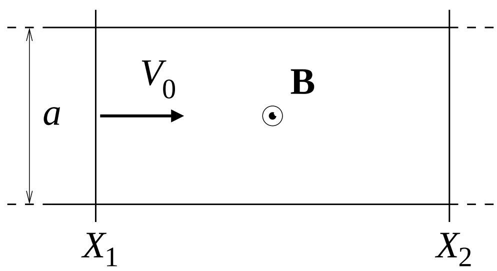

Figura 2

c) Assumendo come condizione iniziale a $t = 0$ che il lato 1 possieda velocità iniziale V_0 mentre il lato 2 sia inizialmente in quiete ($V_1(0) = V_0$, $V_2(0) = 0$), dare la soluzione delle equazioni del moto e calcolare le velocità finali dei lati (supponendo che essi non arrivino mai a toccarsi).

d) Calcolare l'energia totale dissipata nel circuito e confrontarla con la variazione di energia cinetica.

e) (facoltativo) Determinare ora una condizione sulla distanza iniziale $d = X_2(0) - X_1(0)$ e su V_0 affinché i due lati vengano a contatto ad un certo istante.

NB In tutte le domande si trascuri la possibile variazione della resistenza (dovuta alla variazione della lunghezza del circuito) e gli effetti del campo magnetico generato dalla corrente indotta (ovvero sia l'autoinduzione che la forza d'interazione fra correnti).

Formule utili

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \tag{1}$$

Forza su un circuito percorso da corrente in un campo magnetico $\mathbf{B}$

$$\mathbf{F} = \int_C I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} \tag{2}$$

dove il verso di $d\mathbf{l}$ è quello in cui scorre la corrente I.

SOLUZIONI

1

a) Il campo $\mathbf{E}$ è diretto radialmente (in coordinate cilindriche). Applicando il teorema di Gauss ad un cilindro coassiale di raggio r e lunghezza $\Delta\ell$

$$2\pi r\varepsilon E_r = \lambda\Delta\ell, \qquad E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}. \tag{3}$$

All'esterno del filo il campo è nullo.

b) Il campo $\mathbf{B}$ è diretto azimutalmente. Applicando la legge di Ampère ad un cerchio di raggio r con centro sull'asse

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I, \qquad B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{4}$$

All'esterno del filo il campo è nullo.

c) Affinché le particelle non subiscano deflessioni la forza deve essere nulla:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B} = 0. \tag{5}$$

Se $\mathbf{v}$ è lungo z e i campi sono quelli calcolati sopra troviamo

$$v = -\frac{\lambda/\varepsilon_0}{\mu_0 I} = -\frac{\lambda c^2}{I}. \tag{6}$$

2

a) Il flusso del campo magnetico e la corrispondente forza elettromotrice indotta sono dati da

$$\Phi = a(X_2 - X_1)B, \qquad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -a(V_2 - V_1)B. \tag{7}$$

Quindi la corrente è

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{aB}{R}(V_2 - V_1). \tag{8}$$

b) Le forze agenti sui lati mobili sono date da $\pm aBI$ e sono dirette in verso opposto alle velocità. Le equazioni del moto sono allora date da

$$m\frac{dV_1}{dt} = -aBI = +\frac{a^2B^2}{R}(V_2 - V_1), \qquad m\frac{dV_2}{dt} = +aBI = -\frac{a^2B^2}{R}(V_2 - V_1). \tag{9}$$

c) Sommando e sottraendo le equazioni precedenti otteniamo

$$\frac{d}{dt}(V_2 + V_1) = 0, \qquad \frac{d}{dt}(V_2 - V_1) = -\frac{2a^2B^2}{Rm}(V_2 - V_1). \tag{10}$$

Posto $\tau \equiv (Rm/2a^2B^2)$, le soluzioni corrispondenti alle condizioni iniziali sono

$$V_2 + V_1 = V_0, \qquad V_2 - V_1 = -V_0 e^{-t/\tau}, \tag{11}$$

da cui otteniamo

$$V_{1,2} = \frac{V_0}{2}\left(1 \pm e^{-t/\tau}\right). \tag{12}$$

Asintoticamente $V_{1,2}(t \to \infty) = V_0/2$.

d) La potenza dissipata è data da $P = RI^2$ dove l'espressione esplicita della corrente è

$$I(t) = -\frac{aBV_0}{R}e^{-t/\tau}. \tag{13}$$

Quindi l'energia totale dissipata è

$$U_d = \int_0^\infty RI^2(t)dt = \frac{(aBV_0)^2}{R}\int_0^\infty e^{-2t/\tau}dt = \frac{(aBV_0)^2}{R}\frac{\tau}{2} = \frac{mV_0^2}{4} \tag{14}$$

che è uguale alla differenza tra l'energia cinetica iniziale e quella finale:

$$\frac{m}{2}V_0^2 - 2\frac{m}{2}\left(\frac{V_0}{2}\right)^2 = \frac{mV_0^2}{4}. \tag{15}$$

e) La legge oraria con le condizioni iniziali $X_1(0) = 0$, $X_2(0) = d$ è data da

$$X_1(t) = \frac{V_0}{2}(t - \tau e^{-t/\tau}) + \frac{V_0\tau}{2}, \qquad X_2(t) = \frac{V_0}{2}(t + \tau e^{-t/\tau}) - \frac{V_0\tau}{2} + d, \tag{16}$$

per cui asintoticamente, se i lati mobili non si toccano si troveranno ad una distanza

$$X_2(\infty) - X_1(\infty) = d - V_0\tau. \tag{17}$$

Se $d - V_0\tau < 0$ i lati si toccano all'istante in cui $X_1(t) = X_2(t)$.