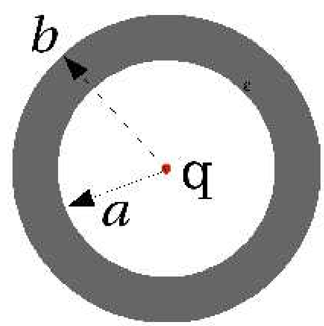
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2003-2004

Compito di Fisica bIA (2 Febbraio 2004)

1

Una carica puntiforme q è posta al centro di un guscio sferico dielettrico di raggio interno a, raggio esterno $b > a$ e suscettività dielettrica χ.



a) Calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio.

b) Calcolare la pressione sulle superfici interna ed esterna del guscio, e dire se il guscio tende ad espandersi o a comprimersi.

c) In che limite si ottengono i risultati analoghi per un guscio conduttore?

Soluzione

a) Per la simmetria del problema sia il campo elettrico $\vec{E}$ che il vettore spostamento elettrico $\vec{D}$ avranno simmetria radiale sferica. Per $r > 0$ $\vec{D}$, perpendicolare alle due superfici sferiche di separazione, è continuo su tutto lo spazio, e, per il teorema di Gauss vale

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}.$$

Essendo $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$, otteniamo $\vec{E}$:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \text{per } r < a \text{ e } r > b, \quad \text{mentre } E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \text{ per } a < r < b$$

dove $\varepsilon_r = 1 + \chi$.

b) La densità di energia per unità di volume vale

$$u = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon_0\varepsilon_r}, \quad \text{quindi } u = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \quad \text{fuori dal guscio, e} \quad u = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0\varepsilon_r r^4} \quad \text{dentro al guscio}$$

Se una piccola porzione ΔS della superficie sferica di raggio b avanza verso l'esterno di una quantità infinitesima dr, avremo una variazione di energia

$$dU = -\Delta S dr \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 b^4}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) = -\Delta S dr \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 b^4}\frac{\chi}{\varepsilon_r}$$

Che corrisponde ad una pressione

$$p_b = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 b^4}\frac{\chi}{\varepsilon_r}$$

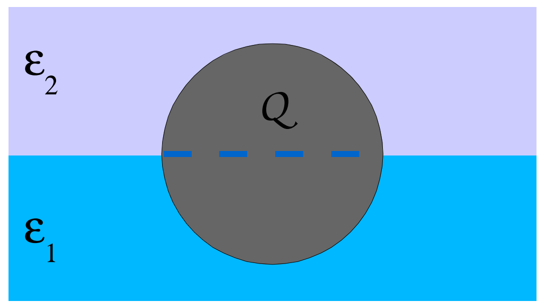
diretta verso l'esterno. Analogamente, sulla superficie di raggio a avremo una pressione

$$p_a = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 a^4}\frac{\chi}{\varepsilon_r}$$

diretta verso il centro. Il guscio tende quindi ad espandersi.

c) I risultati analoghi per un guscio conduttore si ottengono al limite $\varepsilon_r \to \infty$, al quale il campo elettrico rimane immutato fuori dal guscio e si annulla all'interno di esso, mentre nelle espressioni per la pressione $\chi/\varepsilon_r \to 1$.

2



Una sfera di raggio R, conduttrice, è immersa per metà in un liquido dielettrico di costante dielettrica ϵ_1. Al di sopra del liquido si ha un gas di costante dielettrica ϵ_2. Si deposita una quantità di carica Q sulla sfera.

a) Calcolare il campo elettrico.

b) Calcolare le densità di carica libera e di polarizzazione.

c) Si dica se c'è una forza elettrostatica netta sulla sfera ed in quale direzione (si assuma $\epsilon_2 < \epsilon_1$).

Soluzione

a) I campi **D** ed **E** sono radiali. Applicando la legge di Gauss a una superficie sferica di raggio $r > R$, si ottiene $2\pi r^2(D_1+D_2) = Q$ ($D_1 \equiv$ spostamento elettrico nel liquido, $D_2 \equiv$ spostamento elettrico nel gas). D'altra parte il campo elettrico di separazione fra liquido e gas è puramente tangenziale e quindi $E_1 = E_2 = E$. Per conseguenza, ricordando che $D_i = \epsilon_0 \epsilon_i E_i$, abbiamo

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{1}{r^2}$$

b) Per definizione $\sigma_p = \mathbf{P}\cdot\mathbf{n}$ e $\mathbf{P} = \epsilon_0(\epsilon_i - 1)\mathbf{E}$. Dall'espressione precedente per il campo elettrico ricaviamo la densità di carica legata (la normale uscente dai dielettrici è diretta in senso opposto rispetto al campo elettrico):

$$\sigma_{p,i} = \frac{(1-\epsilon_i)}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{Q}{R^2}$$

Le densità di carica libera sono $\sigma_{l,i} = \mathbf{D}_i \cdot \mathbf{n}$ da cui si ricava:

$$\sigma_{l,i} = \frac{\epsilon_i}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\frac{Q}{R^2}$$

c) La pressione elettrostatica sulla superficie della semisfera a contatto col dielettrico ϵ_i è

$$P_i = \sigma_{l,i} E/2 = \frac{\epsilon_i}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{Q}{R^2} E.$$

Quindi $P_2 < P_1$. Le forze risultanti F_1 e F_2, ottenute dall'integrale di superficie di P_1 e P_2, sono dirette rispettivamente verso verso il basso e verso l'alto e $F_1 > F_2$ (le superfici sono identiche). La forza netta elettrostatica $F = F_1 - F_2$ è quindi verso il basso.

3

In una regione di spazio dove non vi sono correnti si trova un campo magnetico statico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\rho, z)$ avente simmetria cilindrica (cio'e di rotazione attorno all'asse z). La componente del campo lungo l'asse z è nota e vale $B_z = B_0 \hat{\mathbf{z}} z/L$.

a) Si determini la componente radiale B_ρ del campo magnetico.

Una piccola spira circolare di raggio a e resistenza R si muove con velocità v lungo l'asse z, con la propria superficie perpendicolare all'asse.

b) Si calcoli la corrente indotta nella spira e la potenza dissipata per effetto Joule.

c) Si calcoli la forza sulla spira.

Soluzione

a) Utilizzando la divergenza in coordinate cilindriche

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \partial_\rho (\rho B_\rho) + \partial_z B_z$$

dovendo essere $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ si trova $\partial_\rho(\rho B_\rho) = -B_0 \rho/L$ da cui, integrando, $B_\rho = -B_0\rho/2L$.

Allo stesso risultato si arriva considerando il teorema di Gauss per una superficie cilindrica di raggio ρ ed altezza h intorno all'asse z:

$$\Phi(\mathbf{B}) = \pi\rho^2[B_z(z+h) - B_z(z)] + 2\pi\rho h B_\rho(\rho) = 0$$

da cui si ricava il risultato precedente.

b) Il flusso di $\mathbf{B}$ sulla superficie della spira è $\Phi_s(\mathbf{B}) \simeq B(z)\pi a^2$ dove $dz/dt = v$. Quindi la f.e.m indotta è $\mathcal{E} = -d\Phi_s/dt = -\pi a^2 B_0 v/L$. La corrente è $I = \mathcal{E}/R$ e la potenza dissipata è $P = RI^2 = (\pi a^2 B_0 v/L)^2/R$.

c) La forza meccanica si può ricavare da $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = P$ da cui $\mathbf{F} = \mathbf{v}(\pi a^2 B_0/L)^2$ (dove $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{z}}$) o anche da $\mathbf{F} = -\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})/2$ dove $\mathbf{m} = -\pi a^2 I \hat{\mathbf{z}}$ è il momento magnetico indotto della spira.