Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2002-2003

Compito di Fisica bIA (19 dicembre 2003) – SOLUZIONI

1

Un cilindro conduttore di altezza h e sezione circolare di raggio $R \ll h$ è formato da due cilindri di stessa sezione uniti per la base, aventi altezze $h/2$ e costituiti da due diversi materiali con resistività rispettivamente ρ_1, ρ_2.

Le due facce esterne vengono connesse ad un generatore che fornisce una ddp costante V.

a) Calcolare la corrente nel conduttore in stato stazionario e la densità di carica superficiale alla superficie di contatto fra i due materiali.

b) Calcolare il campi magnetico $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ all'interno ed all'esterno del conduttore assumendo che i due materiali abbiano entrambi permeabilità magnetiche identiche a quella del vuoto ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$).

c) Supponendo che i due cilindri abbiano anche permeabilità magnetiche *diverse* ($\mu_1 \neq \mu_2$), calcolare i campi $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ all'interno del conduttore.

Soluzione

a) In stato stazionario la densità di corrente $\mathbf{j}$ deve essere continua poichè $\nabla \cdot \mathbf{j} = \partial_t \rho = 0$ (qui ρ è la densità di carica!). Quindi poichè nei due semicilindri $J = E_{1,2}/\rho_{1,2}$ sia ha $E_1 \neq E_2$. Essendo $(E_1 + E_2)h/2 = V$ si ricava $J = (2V/h)/(\rho_1 + \rho_2)$. La densità di carica superficiale è $\sigma = \epsilon_0(E_2 - E_1) = (2\epsilon_0 V/h)(\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$.

b) $\mathbf{H} = H(r)\hat{\boldsymbol{\theta}}$ per simmetria. Dalla legge di Ampère $2\pi r H = \pi r^2 J$ per $r < R$ e $2\pi r H = \pi R^2 J = I$ per $r > R$, da cui $H = Jr/2$ e $H = I/r$ rispettivamente, mentre $B = \mu_0 H$.

c) H è continuo alla superficie di separazione ed ha la stessa espressione del punto b), mentre nei due semicilindri $B_{1,2} = \mu_{1,2} H$.

2

Una piccola sfera di raggio a si trova lungo l'asse di una spira conduttrice (mantenuta fissa) di superficie S e resistenza R, a distanza d da essa ($d \gg a, b$).

Calcolare la forza tra sfera e spira nelle seguenti situazioni:

a) la sfera ha magnetizzazione permanente M (diretta lungo l'asse) e nella spira si mantiene la corrente costante I_0;

b) la sfera ha suscettività magnetica χ e nella spira si mantiene la corrente costante I_0;

c) la sfera ha magnetizzazione permanente M come al punto a), velocità $\mathbf{v}$ lungo l'asse, e la spira è disconnessa da un qualsiasi generatore di tensione o corrente.

d) Nel caso a), si discuta se la sfera (di massa $\mathcal{M}$) raggiunge il centro della spira, e con quale velocità.

Soluzione

a) La spira produce sull'asse un campo magnetico $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ dato da

$$B = \frac{\mu_0 S I_0}{2\pi z^3}.$$

La sfera ha un momento magnetico $\mathbf{m}_s = V\mathbf{M}$ (dove $V = 4\pi a^3/3$) e la forza è

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}_s \cdot \mathbf{B}) = -\frac{3V\mu_0}{z^4}\left(\frac{SMI_0}{2\pi}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

il cui segno dipende da I_0. Se $I_0 < 0$ (> 0) la forza è repulsiva (attrattiva) poichè il momento magnetico della spira è opposto (concorde) a quello della sfera.

b) Il campo della spira induce nella sferetta un momento magnetico $\mathbf{m}_s = V\chi B/\mu_0$ diretto *sempre* come il momento magnetico della spira $\mathbf{m}_c = SI_0\mathbf{z}$. La forza è quindi *sempre* attrattiva e vale

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}_s \cdot \mathbf{B}) = -\frac{3V\mu_0\chi}{z^4}\left(\frac{SI_0}{2\pi}\right)^2\hat{\mathbf{z}}$$

c) La sfera genera sulla superficie della spira un campo magnetico

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mathbf{M}V}{z^3}$$

il cui flusso è $\Phi \simeq B_1 S$ (dove $S = \pi b^2$). Se la sfera è in moto con velocità v, $dz/dt = -v(t)$ e quindi $\Phi = \Phi(t)$. La corrente indotta nella spira è

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d}{\Phi}dt = \frac{3\mu_0 MV}{2\pi z^3}v$$

e la forza è

$$\mathbf{F} = -\frac{3V\mu_0\chi}{z^4}\left(\frac{SMI}{2\pi}\right)\hat{\mathbf{z}} \sim -\frac{1}{z^7}\mathbf{v}$$

La forza ha verso opposto a $\mathbf{v}$ in quanto per la legge di Lenz la corrente indotta fa in modo da opporsi all'aumento del flusso magnetico prodotto dall'avvicinamento della sfera.

d) Ovviamente, partendo da fermo, la sfera raggunge la spira solo nel caso di forza attrattiva ($I_0 > 0$). La sua energia iniziale è

$$U_0 = -\mathbf{m}_s \cdot \mathbf{B} = -\frac{V\mu_0}{d^3}\left(\frac{SMI_0}{2\pi}\right)$$

L'energia finale è

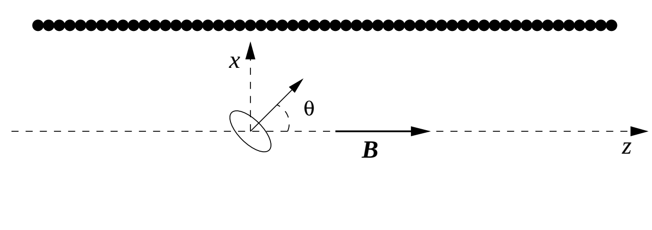
$$U_f = \frac{\mathcal{M}}{2}v_f^2 - \mathbf{m}_s \cdot \mathbf{B}_0$$

essendo $\mathbf{B}_0 = (\mu_0 I_0/2b)\hat{\mathbf{z}}$ il campo al centro della spira. Posto $U_0 = U_f$ si ricava

$$v_f = \frac{2}{\mathcal{M}}\sqrt{\frac{\mu_0 M I_0 V}{2b}\left(1 - \frac{b^3}{d^3}\right)}.$$

3

Una piccola spira circolare di raggio a, resistenza R e induttanza trascurabile si trova all'interno di un lungo solenoide avente n spire per unità di lunghezza. Il centro della spira giace sull'asse del solenoide, con il quale l'asse della spira forma un angolo θ (v. figura). Nel solenoide passa la corrente (lentamente) variabile nel tempo $I(t) = I_0 t/\tau$.



Calcolare, discutendo i risultati:

a) la corrente i indotta nella spira ed il campo magnetico *totale* al centro della spira;

b) il momento delle forze sulla spira;

c) la forza sulla spira, *almeno* in direzione e verso.

Soluzione

a) Il campo generato dal solenoide al suo interno vale $B = \mu_0 n I$, quindi, nel nostro caso, $B = \mu_0 n I_0 t/\tau$. Il flusso attraverso la spira vale $\Phi = \pi a^2 B \cos\theta$, la forza elettromotrice indotta e la corrente circolante nella spira saranno così

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi a^2 \mu_0 n I_0 \cos\theta}{\tau}, \qquad I_{sp} = -\frac{\pi a^2 \mu_0 n I_0 \cos\theta}{R\tau}$$

Al centro della spira la corrente indotta genera un campo B_{sp} che in modulo vale

$$B_{sp} = \frac{\mu_0 I_{sp}}{2a} = \frac{\pi a \mu_0^2 n I_0 \cos\theta}{2R\tau}$$

che, dovendo opporsi alla variazione di flusso per la legge di Lenz, forma un angolo $\pi - \theta$ con il campo generato dal solenoide. Il campo magnetico totale al centro della spira avrà una componente lungo z (asse del solenoide) ed una lungo x (perpendicolare a z nel piano che contiene z e $\vec{B}_{sp}$

$$B_x = \frac{\pi a \mu_0^2 n I_0 \cos\theta \sin\theta}{2R\tau} \qquad B_z = \mu_0 n I_0 \frac{t}{\tau} - \frac{\pi a \mu_0^2 n I_0 \cos^2\theta}{2R\tau}$$

b) Il momento meccanico Γ che agisce sulla spira vale $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$, dove $\vec{m}$ è il momento magnetico della spira $\vec{m} = I_{sp}\vec{S}$, quindi

$$\vec{\Gamma} = \pi a^2 \cdot \frac{\pi a^2 \mu_0 n I_0 \cos\theta}{R\tau} \cdot \mu_0 n I_0 \frac{t}{\tau} \sin(\pi - \theta) = \frac{\pi^2 a^4 \mu_0^2 n 2 I_0^2 \cos^2\theta}{R\tau^2} t$$

che tende ad orientare $\vec{m}$ perpendicolarmente a $\vec{B}$.

c) La forza sulla spira vale vale $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})$, con l'orientazione di $\vec{m}$ costante.