Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2003-2004

Compito di Fisica bIA (21 dicembre 2004)

1

Un cilindro di raggio R ed altezza h possiede una magnetizzazione permanente $\mathbf{M}$ parallela all'asse.

a) Si mostri che la densità di corrente amperiana è nulla nel volume del cilindro, mentre sulla superficie laterale del cilindro esiste una corrente amperiana per unità di lunghezza di modulo $\iota = M$.

b) Si trovino i campi $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$ all'interno del cilindro nel limite di altezza infinita $h \gg R$.

c) Si consideri ora il limite di un disco schiacciato ($h \ll R$); si calcoli il campo $\mathbf{B}_0$ al centro del disco e si mostri che $B_0 \propto h/R$.

d) Dal punto c) segue che $B_0 \to 0$ se $R/h \to \infty$. Si ottenga questo risultato sfruttando il metodo della carica magnetica efficace.

(15 punti)

2

Un anello di raggio a e spessore trascurabile possiede una massa M e una carica $Q > 0$, uniformemente distribuite lungo la sua circonferenza. A $t = 0$ viene applicato un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}$ perpendicolare al piano dell'anello, variabile nel tempo secondo la legge $B = B_0 t/\tau$. (Si assuma una simmetria di rotazione attorno all'asse parallelo a $\mathbf{B}$ e passante per il centro dell'anello). Si trascuri in prima istanza l'autoinduzione dell'anello.

Calcolare:

a) il campo elettrico indotto lungo la circonferenza dell'anello;

b) la velocità angolare dell'anello al tempo $t = \tau$;

c) il campo magnetico indotto dalla rotazione al centro dell'anello.

d) Si dica se e come cambiano le risposte a)-b) se il campo B varia secondo una legge temporale arbitraria $B = B(t)$ con $B(0) = 0$ e $B(\tau) = B_0$. (Si trascuri la corrente di spostamento di Maxwell.)

e) Si supponga ora che l'anello abbia un coefficiente di autoinduzione L; come cambiano le risposte precedenti?

(15 punti)

SOLUZIONI

1

a) Dalla relazione $\mathbf{J} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{M}$ segue che $\mathbf{J} = 0$ nel volume essendo $\mathbf{M}$ uniforme. Quindi la corrente $\mathbf{J}$ può esistere solo sulla superficie. Applicando il teorema di Stokes ad un rettangolo posto attraverso l'interfaccia laterale cilindro–vuoto, si ha $\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} = M\ell = I_c$ dove ℓ è la lunghezza del lato parallelo all'interfaccia e I_c è la corrente passante per la superficie del rettangolo. Definita $\iota\ell = I$, si ha $\iota = M$. La corrente $\boldsymbol{\iota}$ è solenoidale, ovvero $\boldsymbol{\iota} = \mathbf{n} \times \mathbf{M}$ essendo $\mathbf{n}$ il versore normale alla superficie laterale.

b) In questo limite il sistema è equivalente ad un lungo solenoide per il quale $nI = \iota$ essendo I l'intensità di corrente e n il numero di spire per unità di lunghezza. Quindi i campi sono uniformi, paralleli a $\mathbf{M}$ e $B = \mu_0 nI = \mu_0 \iota = \mu_0 M$. Inoltre $H = (B/\mu_0 - M) = 0$.

c) In questo limite il sistema è equivalente ad una spira percorsa dalla corrente $I = \iota h = Mh$. Quindi al centro $B_0 = \mu_0 I/2R = \mu_0 Mh/2R$.

d) Poichè la densità di carica magnetica $\rho_M = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{M}$, si ha che $\rho_M = 0$ nel volume del disco, mentre sulle superfici circolari esiste una densità superficiale $\sigma_M = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \pm M$. L'equivalente elettrostatico è quello di un condensatore piano. Il campo "generato" dalla carica magnetica è il campo $\mathbf{H}$, che risulta quindi uniforme all'interno del disco, dove vale $H = -\sigma_M = -M$, e nullo all'esterno. Segue che $B = \mu_0(H + M)$ è nullo dappertutto.

2

a) Il campo $\mathbf{E}$ ha linee di forza circolari e concentriche attorno all'asse di simmetria. La sua circuitazione lungo le linee di forza è uguale alla derivata temporale (con segno meno) del flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la superficie racchiusa dalle linee:

$$2\pi r E(r) = -\pi r^2 \partial_t B = -\pi r^2 B_0/\tau.$$

Quindi, lungo la circonferenza dell'anello ($r = a$) il campo vale $E = E(a) = -aB_0/2\tau$.

b) Il campo E induce una rotazione dell'anello con velocità $v = a\omega$ dove ω è la velocità angolare. Consideriamo un segmento infinitesimo dell'anello di lunghezza $d\ell$ e quindi massa $dm = (M/2\pi a)d\ell$ e carica $dq = (Q/2\pi a)d\ell$. L'equazione del moto dà

$$dm\frac{dv}{dt} = adm\frac{d\omega}{dt} = dqE$$

e quindi

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Q}{M}\frac{E}{a} = -\frac{Q}{2M}\frac{B_0}{\tau}.$$

Quindi $\omega(t) = \omega_f t/\tau$ dove $\omega_f = -QB_0/2M$. Il segno meno indica una rotazione *oraria* rispetto al verso di $\mathbf{B}$: in forma vettoriale

$$\boldsymbol{\omega}(t) = -\frac{Qt}{2M\tau}\mathbf{B}_0.$$

c) L'anello rotante equivale ad una spira percorsa dalla corrente $I = Q/T = \omega Q/2\pi$. Quindi al centro il campo indotto vale $B_i = \mu_0 I/2a$. Per quanto trovato al punto precedente il verso è opposto a quello di $\mathbf{B}_0$:

$$\mathbf{B}_i = -\frac{\mu_0 Q^2 t}{8\pi M a\tau}\mathbf{B}_0.$$

d) Si ha in generale $E = -(a/2)dB/dt$ e quindi l'equazione del moto diventa

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{Q}{M}\frac{E}{a} = -\frac{Q}{2M}\frac{dB}{dt},$$

che può essere integrata tra 0 e t per dare $\omega(t) = -(Q/2M)B(t)$. Quindi $\omega(t)$ segue la stessa legge temporale di $B(t)$. In particolare, $\omega(\tau) = -(Q/2M)B(\tau) = -(Q/2M)B_0$ e quindi la velocità angolare al tempo τ è la stessa del caso b). Questo a patto che si possano trascurare gli effetti della corrente di spostamento di Maxwell (in quanto ora E in generale dipende dal tempo) che genererebbero una correzione a $\mathbf{B}$.

e) Se c'è autoinduzione la circuitazione di E viene modificata come segue:

$$2\pi a E = -\pi a^2\frac{dB}{dt} - L\frac{dI}{dt}.$$

Quindi l'equazione del moto diventa

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{2M}\frac{dB}{dt} - \frac{Q^2 L}{4\pi^2 M a^2}\frac{d\omega}{dt},$$

ovvero

$$\left(1 + \frac{Q^2 L}{4\pi^2 M a^2}\right)\frac{d\omega}{dt} = -\frac{Q}{2M}\frac{dB}{dt}.$$

L'autoinduzione equivale quindi ad un aumento dell'inerzia dell'anello, e può essere inglobata in una "massa efficace" $M' = M(1 + Q^2L/4\pi^2 M a^2)$; la legge del moto ha la stessa forma, ma la velocità angolare viene diminuita del fattore M'/M.