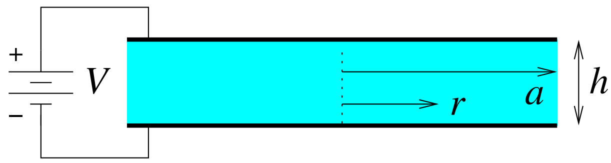
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2005-2006

Compito di Fisica b1A (20/12/2005)

1



Lo spazio tra due armature metalliche circolari piane di raggio a, la cui distanza è $h \ll a$, è riempito di un materiale conduttore disomogeneo, la cui conducibilità dipende dalla distanza r dall'asse del sistema:

$$\sigma = \sigma(r) = \sigma_0 + \sigma_1(r/a)\,.$$

Tra le armature si mantiene la differenza di potenziale costante V.

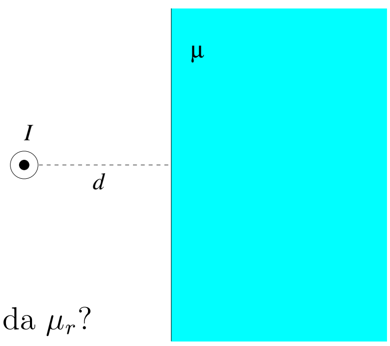
Calcolare, in condizioni stazionarie e trascurando gli effetti di bordo:

a) la corrente totale I attraverso il conduttore e la sua resistenza $R = V/I$,

b) il campo magnetico all'interno del conduttore.

(8 punti)

2



Si consideri un filo di lunghezza infinita, nel quale scorre la corrente I, posto parallelamente ed a distanza d dal piano $x = 0$. Il semispazio $x > 0$ è riempito da un materiale uniforme avente permeabilità magnetica relativa μ_r.

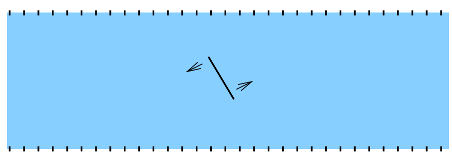
Calcolare

a) il campo magnetico in tutto lo spazio,

b) la forza per unità di lunghezza sul filo; come dipende il suo verso da μ_r?

(12 punti)

3



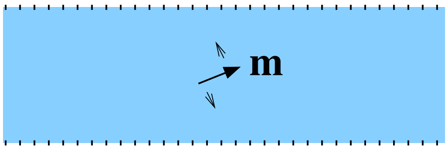
Una spira di raggio a e resistenza R è posta col proprio centro sull'asse di un lungo solenoide (avente raggio $b > a$ e n spire per unità di lunghezza) e viene mantenuta in rotazione con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$ perpendicolare all'asse del solenoide. Nel solenoide viene mantenuta la corrente continua I.

Calcolare

a) il flusso di campo magnetico sulla spira in funzione del tempo,

b) il momento delle forze esterne e la potenza da esse sviluppata necessari a mantenere la spira in rotazione.

Si consideri ora lo stesso solenoide disconnesso da qualsiasi generatore di corrente, mentre la spira è sostituita da un dipolo magnetico anch'esso ruotante con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ perpendicolare all'asse del solenoide.



c) Calcolare il flusso del campo magnetico attraverso il solenoide.

(15 punti)

SOLUZIONI

1

a) Trascurando gli effetti di bordo **E** è perpendicolare alle armature. In condizioni stazionarie **E** deve essere uniforme perché $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = 0$. Si ha quindi $E = V/h$. La densità di corrente è data da

$$J = J(r) = \sigma(r)E = [\sigma_0 + \sigma_1(r/a)]E$$

La corrente totale attraverso il cerchio di raggio r si ottiene con l'integrale di superficie

$$I(r) = \int_0^r J(r) 2\pi r' dr' = \pi r^2 \left[\sigma_0 + \sigma_1 \frac{2r}{3a}\right] E\,; \qquad I = I(a) = \pi a^2 \left[\sigma_0 + \frac{2}{3}\sigma_1\right] E$$

b) Per simmetria il campo magnetico è solenoidale e dipende solo da r: applicando la legge di Ampère, la sua circuitazione sulla circonferenza di raggio r è uguale alla corrente concatenata:

$$2\pi r B_\phi(r) = \mu_0 I(r)\,,$$

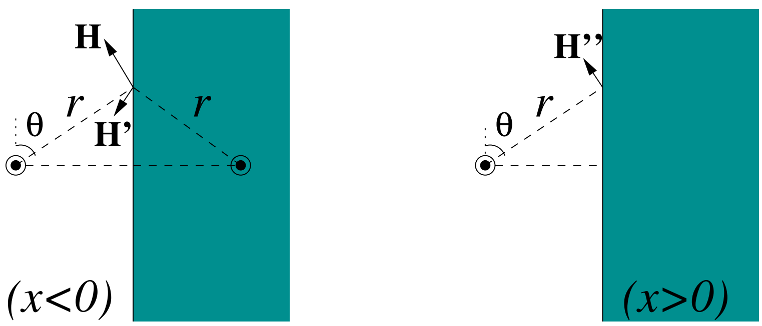
da cui si ottiene

$$B_\phi(r) = \frac{\mu_0 r}{2} \left[\sigma_0 + \sigma_1 \frac{2r}{3a}\right] E$$

2

a) Risolviamo il problema col metodo delle immagini. Ipotizziamo che nel semispazio $x < 0$ il campo sia quello dovuto al filo reale con la corrente I, più quello di un filo immagine di corrente I', posto in posizione simmetrica; nel semispazio $x > 0$ ipotizziamo che il campo sia quello di un secondo filo immagine di corrente I'', posto nella posizione del filo reale. Per determinare i valori di I' ed I'' in funzione di I dobbiamo imporre la continuità delle componenti normale di **B** e tangenziale di **H** alla superficie $x = 0$.

Il campo **H** creato da un filo infinito di corrente I è solenoidale [$\mathbf{H} = H(r)\boldsymbol{\phi}$] e vale $H(r) = I/2\pi r$. Per la simmetria dei campi basta studiare le condizioni al contorno in un punto P sul piano del disegno, posto a distanza r e nella direzione $\mathbf{n} = (\sin\theta, \cos\theta)$ rispetto al filo reale.



Il campo creato dal filo reale in tale punto ha quindi componenti

$$H_x = -\frac{I}{2\pi r}\cos\theta\,, \qquad H_y = \frac{I}{2\pi r}\sin\theta\,.$$

Nella stessa maniera si determinano i campi generati dai fili immagine

$$H'_x = -\frac{I'}{2\pi r}\cos\theta\,, \qquad H'_y = -\frac{I'}{2\pi r}\sin\theta\,,$$
$$H''_x = -\frac{I''}{2\pi r}\cos\theta\,, \qquad H''_y = \frac{I''}{2\pi r}\sin\theta\,. \tag{1}$$

La condizione al bordo su $\mathbf{H}$ impone $H_y + H'_y = H''_y$, quella su $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ impone $\mu_0(H_x + H'_x) = \mu(H''_x)$. Otteniamo quindi il sistema

$$I - I' = I''\,, \qquad \mu_0(I + I') = \mu I''\,,$$

la cui soluzione è ($\mu_r = \mu/\mu_0$)

$$I' = I\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1}\,, \qquad I'' = \frac{2I}{\mu_r + 1}\,.$$

b) Per quanto visto sopra la forza sul filo reale è quindi la forza tra due fili paralleli a distanza $2a$, aventi corrente I e I'. Per unità di lunghezza si ha

$$\frac{dF}{d\ell} = -\frac{II'}{2\pi(2a)} = -\frac{I^2}{4\pi a}\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \tag{2}$$

La forza è attrattiva per correnti concordi, ovvero se $\mu_r > 1$ (materiale paramagnetico), mentre è repulsiva se le correnti sono discordi, ovvero se $\mu_r < 1$ (materiale diamagnetico).

3

a) Il campo $\mathbf{B}$ del solenoide è uniforme, parallelo all'asse e vale in modulo $B = \mu_0 nI$. Il suo flusso sulla spira vale quindi

$$\Phi = \mathbf{B}\cdot\mathbf{S} = \mu_0 nI\pi a^2\cos\omega t \equiv M_i(t)I\,.$$

Per definizione, M_i è il coefficiente di mutua induzione, il quale in questo caso dipende dal tempo a causa della rotazione della spira. Quindi se nella spira si mantiene la corrente i il flusso del campo magnetico generato dalla spira attraverso il solenoide è dato da $M_i i$. Questa proprietà ci sarà utile al punto c).

b) La variazione del flusso del campo magnetico induce nella spira la forza elettromotrice $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$. La corrente indotta nella spira è quindi data da

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 nI\pi a^2}{R}\omega\sin\omega t\,.$$

Per la conservazione dell'energia, in condizioni stazionarie la potenza meccanica sviluppata dalle forze che mantengono la spira in rotazione deve essere uguale alla potenza dissipata per effetto Joule: si ha quindi

$$P = M\omega = Ri^2\,,$$

relazione da cui si ricava sia la potenza dissipata P che il momento delle forze M. In media sul periodo, essendo $\langle\sin^2\omega t\rangle = 1/2$, si ha

$$\langle P\rangle = \langle M\rangle\omega = \frac{1}{2R}(\mu_0 nI\pi a^2\omega)^2\,.$$

c) Il campo magnetico generato dal dipolo è identico a quello generato da una piccola spira di raggio a, nella quale scorre una corrente i tale che $\pi a^2 i = m$, a distanze grandi rispetto ad a. Il risultato del punto a) vale in particolare se $a \ll b$, dove b è il raggio del solenoide; possiamo allora sostituire il dipolo con una spira equivalente e usare la simmetria della mutua induzione. Il flusso attraverso il solenoide del campo magnetico prodotto dalla spira equivalmente è quindi (a parte una eventuale differenza di fase temporale, che trascuriamo)

$$\Phi' = M_i(t) i = \mu_0 n \pi a^2 i \cos \omega t = \mu_0 n m \cos \omega t \, .$$