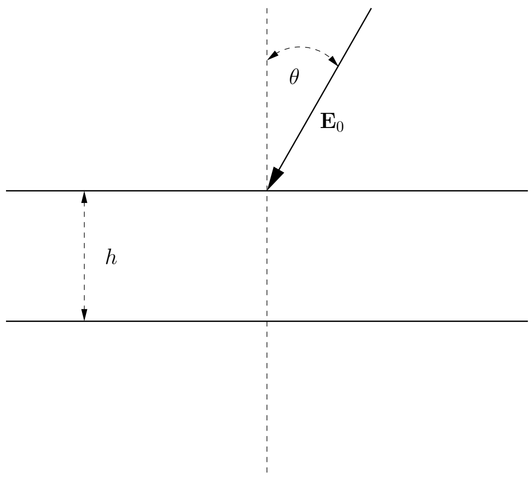
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2004-2005

Compito di Fisica bIA (2 febbraio 2005)

1

Una lastra dielettrica di spessore h, lunghezza $L \gg h$, e permeabilità dielettrica relativa ϵ_r è immersa in un campo elettrico costante $\mathbf{E}_0$, in modo che tale campo esterno formi un angolo θ con la normale alla superficie.



a) Calcolare il campo elettrico all'interno della lastra e l'angolo θ' che esso forma con la normale alla superficie di essa.

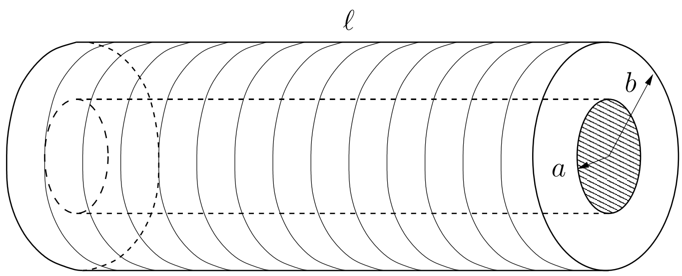
b) Calcolare le densità di carica di polarizzazione.

c) Si dica se il campo esterno esercita un momento di rotazione sulla lastra e se ne dia il verso.

Si trascurino gli effetti al bordo.

2

Un lungo solenoide avente raggio b, lunghezza $\ell \gg b$ e n spire per unità di lunghezza ha al suo interno un cilindro di materiale paramagnetico di permeabilità μ, coassiale al solenoide e avente raggio $a < b$. Nel solenoide circola la corrente I.



a) Calcolare i campi $\mathbf{H}$ e $\mathbf{B}$ all'interno del solenoide.

b) Calcolare il coefficiente di autoinduzione del solenoide.

c) Se la corrente dipende dal tempo secondo la legge $I = I_0 t/\tau$, calcolare il campo elettrico indotto all'interno del solenoide.

SOLUZIONI

1

a) La componente del campo elettrico parallela alla superficie è continua e vale $E_{\parallel} = E_0 \sin\theta$. Nel vuoto la componente perpendicolare del campo vale $E_{v,\perp} = E_0 \cos\theta$. Sfruttiamo la continuità di $D_\perp = \epsilon E_\perp$ per trovare $E_{v,\perp} = \epsilon_r E_{d,\perp}$ dove $\mathbf{E}_d$ è il campo all'interno del dielettrico. Si ha quindi $E_{d,\perp} = E_0 \cos\theta/\epsilon_r$ e

$$\tan\theta' = \frac{E_{d,\parallel}}{E_{d,\perp}} = \frac{E_0 \sin\theta}{E_0 \cos\theta/\epsilon_r} = \epsilon_r \tan\theta\,.$$

Poichè $\epsilon_r > 1$ si ha $\theta' > \theta$.

b) Per il teorema di Gauss si ha

$$\sigma_p = \epsilon_0(E_{v,\perp} - E_{d,\perp}) = \epsilon_0 E_0 \cos\theta \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right)\,.$$

c) La densità di energia elettrostatica all'interno della lastra è

$$u_E = \frac{\epsilon}{2}\mathbf{E}^2 = \frac{\epsilon}{2}E_0^2\left(\epsilon_r^{-2}\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\,.$$

Si vede che l'energia elettrostatica cresce con θ e quindi ci si aspetta che le forze elettrostatiche tendano a riportare la lastra nella posizione di energia minima, cioè per $\theta = 0$.

Assumendo che l'energia sia uniformemente distirbuita, l'energia totale è $U_E = V u_E$, dove V è il volume della lastra, e il momento delle forze è

$$M = -\frac{\partial U_E}{\partial\theta} = \frac{\epsilon}{2}E_0^2 V \sin 2\theta\left(\epsilon_r^{-2} - 1\right) < 0\,.$$

2

a) All'interno del solenoide $\mathbf{H}$ è continuo, risultando parallelo all'asse del cilindro, e vale $H = nI$. Per $r < a$ si ha $\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}_1 = \mu\mathbf{H} = \mu_r\mu_0\mathbf{H}$ mentre per $a < r < b$ si ha $\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}_2 = \mu_0\mathbf{H}$.

b) Il flusso totale di $\mathbf{B}$ attraverso le $N = n\ell$ spire del solenoide, trascurando gli effetti ai bordi è

$$\Phi = N[B_1\pi a^2 + B_2\pi(b^2 - a^2)] = \mu_0 n^2 \ell\pi[(\mu_r - 1)a^2 + b^2] \equiv LI\,.$$

c) Per la simmetria cilindrica del problema, il campo elettrico $\mathbf{E}$ ha linee di forza circolari. Per la legge di Faraday, calcolando la circuitazione di $\mathbf{E} = E(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ lungo le linee di forza e il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la superficie racchiusa da esse, si ha:

$$2\pi E(r) = \begin{cases} -\pi r^2\partial_t B_1 & (r < a)\,, \\ -\pi(r^2 - a^2)\partial_t B_2 - \pi a^2\partial_t B_1 & (a < r < b)\,, \end{cases}$$

da cui

$$E(r) = \begin{cases} -(\mu_0 n I_0/2\tau)r & (r < a)\,, \\ -(\mu_0 n I_0/2\tau)[(r + a^2(\mu_r - 1)/r] & (a < r < b)\,. \end{cases}$$