Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2004-2005

Compito di Fisica bIA (gennaio 2004) – BOZZA

1

Sulla superficie di una sfera di raggio R è distribuita uniformemente una carica elettrica con densità superficiale σ.

a) Si trovi il campo elettrico in tutto lo spazio.

b) Si calcoli la pressione elettrostatica sulla superficie.

La sfera viene messa in rotazione con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ attorno ad un suo diametro.

c) Determinare la distribuzione di corrente superficiale prodotta dalla rotazione.

d) Calcolare il campo magnetico generato dalla corrente superficiale (suggerimento: mostrare che il campo è equivalente a quello di una sfera uniformemente magnetizzata).

2

Nel semispazio $y > 0$ è presente un campo magnetico $B\,\hat{x}$ uniforme. Una spira quadrata di lato L si muove con velocità $v_0\,\hat{y}$ sul piano $x = 0$. Al tempo $t = 0$ la spira inizia ad entrare nel semispazio con campo magnetico. La spira ha una resistenza R e massa M.

a) Trascurando effetti di autoinduzione si calcoli la potenza dissipata dalla resistenza all'instante $t = 0^+$.

b) Si calcoli la legge oraria della spira e si discuta la velocità finale e l'eventuale punto di arresto.

c) Si calcoli il lavoro che deve essere fatto sulla spira affinché questa si muova sempre con velocità costante v_0.

SOLUZIONI

1

a) Per il teorema di Gauss, il campo è nullo all'interno della sfera ($r < R$), mentre all'esterno ($r < R$) è quello di una carica puntiforme $Q = 4\pi R^2\sigma$ posta nel centro della sfera: $\mathbf{E} = k_0 Q\mathbf{r}/r^3$.

b) La pressione è $P = \sigma E(R)/2 = \sigma k_0 Q/2R^2 = \sigma^2/2\epsilon_0$.

c) Preso un sistema di coordinate polari orientato lungo $\boldsymbol{\omega}$, la velocitá tangenziale di rotazione è $\mathbf{v}_t = \omega R \sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$ e determina una corrente superficiale $\boldsymbol{\iota} = \sigma\mathbf{v}_t = \sigma\omega R\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$.

d) Una magnetizzazione uniforme $\mathbf{M}$ equivale ad una corrente nel volume della sfera $\mathbf{J} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{M} = 0$ ed a una corrente superficiale $\boldsymbol{\iota} = \mathbf{M}\times\mathbf{n} = M\sin\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$. Quindi il campo è quello di una sfera con magnetizzazione uniforme $\mathbf{M} = \sigma R\boldsymbol{\omega}$, ovvero uniforme e pari a $(2\mu_0/3)\mathbf{M}$ per $r < R$, mentre è il campo di un dipolo $\mathbf{m} = (4\pi R^3/3)\mathbf{M}$ per $r > R$.

2

a) Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è $\Phi = BLy(t)$, dove $y(t)$ è la coordinata del bordo destro della spira. Si ha ovviamente $dy/dt = v$ dove $v = v(t)$ è la velocità della spira e $v(0) = v_0$. La variazione di Φ induce una forza elettromotrice indotta $\mathcal{E} = -d\Phi/dt = -BLv$ e quindi una corrente $I = \mathcal{E}/R$. La potenza dissipata nella resistenza è $P_d = RI^2 = (BLv)^2/R$. A $t = 0^+$ si ha $P_d = (BLv_0)^2/R$.

b) Per la conservazione dell'energia, sulla spira agisce una forza meccanica la cui potenza è uguale e opposta alla potenza dissipata nella resistenza: $\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = -P_d$ da cui $F = -(BL)^2v/R$. Allo stesso risultato si può arrivare calcolando F come forza magnetica sul circuito percorso dalla corrente indotta I.

Dall'equazione di Newton $Mdv/dt = F$ si ottiene la soluzione $v = v_0e^{-t/\tau}$ dove $\tau = MR/(B^2L^2)$. Lo spazio percorso è

$$y(t) = \int_0^t v(t')dt' = v_0\tau(1 - e^{-t/\tau})\,.$$

Si ha quindi che la spira si arresta per $t \to \infty$ al punto $y_\infty = v_0\tau$, a condizione che $v_0\tau < L$. Altrimenti, detto t^* l'istante in cui la spira entra per intero nella regione di campo magnetico, dato dall'equazione $L = v_0\tau(1 - e^{-t^*/\tau})$, per $t > t^*$ non si ha induzione (Φ è costante) e la spira procede di moto uniforme con la velocità $v(t^*)$.

c) Per mantenere la spira alla velocità iniziale, occorre applicare una forza esterna che bilanci esattamente la dissipazione. Quindi, con gli stessi ragionamenti dei punto a) e b), si ottiene $F_{ext} = -(BL)^2v_0/R$ la quale viene applicata tra $t = 0$ e $t = L/v_0$. Il lavoro compiuto è $\mathcal{L} = F_{ext}L = B^2L^3v_0/R$.