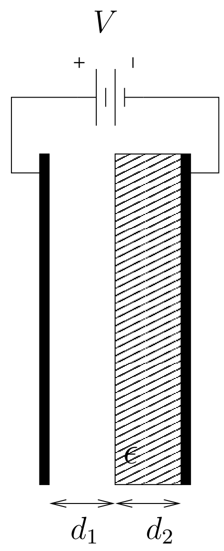
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2004-2005

Compito di Fisica bIA (20 giugno 2005)

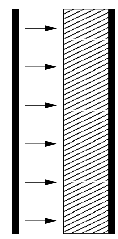
1



Tra le armature di un condensatore piano è mantenuta la tensione costante V. All'interno del condensatore si trovano un primo strato di spessore d_1, riempito di gas avente suscettività dielettrica trascurabile ($\chi = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$), e un secondo strato di spessore d_2 riempito da un materiale dielettrico di permittività dielettrica $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ con $\epsilon_r > 1$. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

a) Calcolare il campo elettrico in tutto il condensatore.

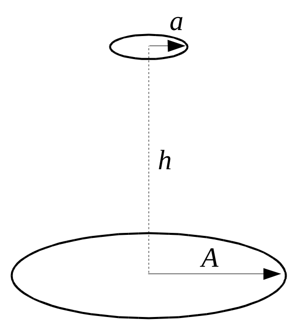
All'istante $t = 0$, all'interno dello strato 1 si verifica una scarica di ionizzazione che rende istantaneamente conduttore il gas, consentendo il passaggio di corrente al suo interno. Si assume che il gas ionizzato sia descrivibile per $t > 0$ come un conduttore ohmico di resistività ρ finita, costante e uniforme.



b) Trascorso un tempo sufficientemente lungo si osserva che la corrente smette di passare e il sistema è nuovamente in condizioni stazionarie. In questa condizione, si calcoli nuovamente il campo elettrico in tutto il condensatore e la densità di carica libera sulla superficie di separazione tra i due strati.

c) Si trovi la legge temporale che descrive l'andamento dei campi nella fase transiente ($t > 0$) e il tempo caratteristico con cui il sistema raggiunge nuovamente una condizione stazionaria.

2



Una spira conduttrice circolare ha raggio A e resistenza R. Una seconda spira, di raggio $a \ll A$ e resistenza r, è posta sull'asse della prima spira e parallelamente ad essa, ad una distanza $h \gg a$. Le spire hanno autoinduzione trascurabile.
Nella prima spira si fa passare la corrente variabile $I(t) = I_0 t/\tau$.

a) Si calcoli la corrente indotta nella seconda spira.

b) Si calcoli la forza tra le spire e si dica se è possibile mantenere la spira piccola in equilibrio, bilanciando l'effetto della gravità.

Si assume ora che il generatore della corrente $I(t)$ venga disconnesso dalla prima spira e connesso alla seconda.

c) Si calcoli la corrente indotta nella prima spira.

SOLUZIONI

1

a) Siano E_1 e E_2 i campi rispettivamente nello strato di gas (1) e di dielettrico (2). La caduta di potenziale tra le armature impone

$$E_1 d_1 + E_2 d_2 = V \, ,$$

mentre la continuità di $D = \epsilon E$ impone

$$\epsilon_0 E_1 = \epsilon E_2 \, .$$

Da queste relazioni si ricava

$$E_1 = \frac{\epsilon V}{\epsilon d_1 + \epsilon_0 d_2} \, , \qquad E_2 = \frac{\epsilon_0 V}{\epsilon d_1 + \epsilon_0 d_2} \, .$$

b) In condizioni stazionarie la corrente nel gas deve essere nulla: poichè $J = E_1/\rho$, si ha $E_1 = 0$. Dato che si ha sempre $E_1 d_1 + E_2 d_2 = V$, si ricava subito $E_2 = V/d_2$.

La densità di carica libera è uguale alla discontinuità di D alla superficie:

$$\sigma = \epsilon E_2 - \epsilon_0 E_1 = \epsilon E_2 = \epsilon V/d_2 \, .$$

c) Dall'equazione di continuità si ha

$$\partial_t \sigma = J = \frac{E_1}{\rho} \, . \tag{1}$$

Usando inoltre le relazioni già viste

$$\sigma = \epsilon E_2 - \epsilon_0 E_1 \, , \qquad E_1 d_1 + E_2 d_2 = V \, ,$$

si può eliminare E_1 e ottenere l'equazione

$$\partial_t \sigma = -\frac{d_2}{\rho(\epsilon_0 d_2 + \epsilon d_1)} (\sigma - \epsilon V/d_2) \, .$$

Posto $\tau = \rho(\epsilon_0 d_2 + \epsilon d_1)/d_2$, la soluzione che soddisfa la condizione iniziale $\sigma = 0$ è

$$\sigma = (\epsilon V/d_2)(1 - e^{-t/\tau}) \, .$$

2

a) Il campo magnetico prodotto lungo l'asse della spira grande è

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} B_z(z) = \hat{\mathbf{z}} \frac{\mu_0 I A^2}{4\pi (A^2 + z^2)^{3/2}} \, .$$

Poichè $a \ll h$, il campo può essere considerato uniforme sulla superficie della spira piccola. Quindi, il flusso del campo magnetico attraverso la spira piccola è

$$\Phi(\mathbf{B}) \simeq \pi a^2 B_z(h) = \frac{\mu_0 I a^2 A^2}{4(A^2 + h^2)^{3/2}} \equiv M I \, .$$

la forza elettromotrice indotta è $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$ e la corrente nella spira è quindi

$$i = \frac{\mathcal{E}}{r} = -\frac{M}{r}\frac{dI}{dt} = -\frac{M I_0}{r\tau} \, .$$

b) Il segno meno nella risposta precedente indica che la corrente i gira in verso opposto alla corrente I, coerentemente con la legge di Lenz che prevede che i tenda a cancellare il campo prodotto da I. Quindi la forza è repulsiva e si oppone alla gravità.

Per calcolare la forza possiamo usare il fatto che, nelle approssimazioni indicate, la spira piccola può essere rappresentata come un dipolo magnetico $\mathbf{m} = \pi a^2 i \hat{\mathbf{z}}$. Quindi

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = -\partial_z(\pi a^2 i M I)|_{z=h}\hat{\mathbf{z}} = -\pi a^2 \frac{I_0^2 t}{r\tau^2}\partial_z(M^2)|_{z=h}\hat{\mathbf{z}} \,.$$

Poichè

$$\partial_z(M^2)|_{z=h} = (\mu_0 a^2 A^2/4)^2 \partial_z(A^2 + z^2)^{-3}|_{z=h} = -\frac{3h}{8(A^2 + h^2)^4}(\mu_0 a^2 A^2)^2 \,, \tag{2}$$

si ha $\mathbf{F} > 0$, ovvero la forza è rivolta verso l'alto. Se m_s è la massa della spira, questa levita magneticamente se $F > m_s g$.

c) Per la simmetria del coefficiente di mutua induzione, se $i = I_0 t/\tau$ il flusso del campo magnetico indotto sulla spira grande è $\Phi' = Mi$, e quindi la corrente indotta è

$$I' = -\frac{M}{R}\frac{dI}{dt} \,. \tag{3}$$