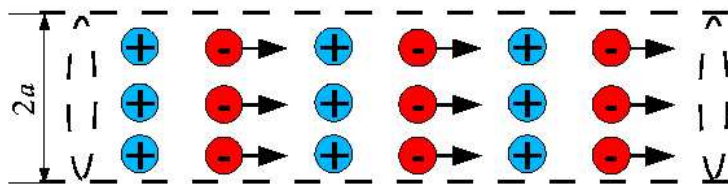


Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2003-2004

Compito di Fisica bIA (12 luglio 2004)

1

Si consideri un fascio cilindrico di elettroni (carica $-e$, massa m_e). Il fascio ha raggio a e contiene n_e elettroni per unità di volume, uniformemente distribuiti, aventi ognuno velocità v_e parallela all'asse del fascio. Nel volume del fascio si trovano inoltre n_p protoni (carica e) per unità di volume, uniformemente distribuiti, aventi velocità nulla.



- Si determinino le distribuzioni risultanti di carica e corrente e i campi elettrico e magnetico da esse generati.
- Si determini la forza totale sugli elettroni e il valore del rapporto tra le densità n_p/n_e per il quale tale forza è nulla.

Si consideri ora il caso di neutralizzazione completa ($n_p = n_e$). In tali condizioni, un criterio per la stabilità del fascio di elettroni afferma che, affinché il fascio non si autodistrugga immediatamente per effetto del campo magnetico che esso genera, il raggio locale dell'orbita degli elettroni deve essere *maggiore* del raggio del fascio.

- Si mostri che tale criterio è equivalente a dire che, per una data velocità degli elettroni, esiste per il fascio una intensità di corrente totale massima I_A proporzionale alla velocità:

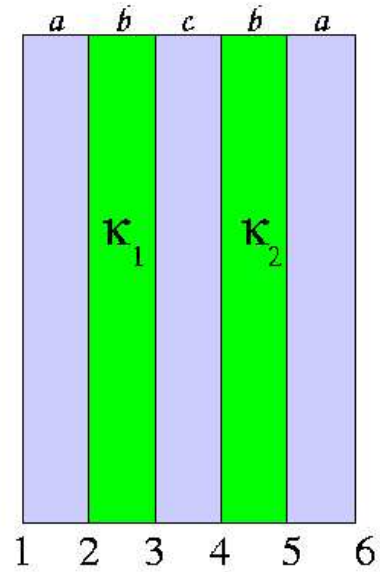
$$I < I_A = I_0 \frac{v_e}{c}.$$

Si determini il valore della costante I_0 .

2

Tra le due armature metalliche (aventi spessore finito a) di un condensatore piano si trovano sovrapposti uno strato di dielettrico con permeabilità relativa κ_1 e spessore b , uno strato conduttore di spessore c , ed uno strato di dielettrico con permeabilità relativa κ_2 e spessore b . Tra le armature esterne si mantiene una tensione costante V .

- Determinare il valore del campo elettrico in ogni strato e la densità di carica superficiale (sia libera che legata) su tutte le superfici (da 1 a 6).
- Calcolare la forza sullo strato conduttore intermedio: se $\kappa_2 > \kappa_1$ esso viene tirato verso il dielettrico 2 o verso 1?



Si trascurino gli effetti di bordo.

Soluzioni

1

- a) Le densità di carica e corrente sono date da $\rho = e(n_p - n_e)$ e $\mathbf{J} = -en_e\mathbf{v}_e$. Applicando rispettivamente i teoremi di Gauss e Stokes si ha un campo elettrico radiale $E_r = \rho r/2\epsilon_0$ ed un campo magnetico azimutale $B_\phi = \mu_0 J r/2$.
- b) La forza totale è radiale e vale $F = -e(E_r + v_e B_\phi)$. Il termine magnetico è negativo, ovvero la forza magnetica tende ad attrarre gli elettroni verso l'asse. Posto $F = 0$ ed usando i risultati del punto a) si ha $\rho/\epsilon_0 = \mu_0 J v_e$ da cui, essendo $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, si ottiene $n_p/n_e = 1 - (v_e/c)^2 < 1$ (c'è un eccesso di carica negativa che dà un campo elettrico negativo che bilancia il termine magnetico).
- c) Il raggio dell'orbita è $r_c = v_e/\omega_c = m_e v_e/eB$. Posto $r_L > a$ e sostituendo per B il valore massimo (cioè per $r = a$) $B_{max} = \mu_0 J a/2 = \mu_0 I/2\pi a$, essendo $I = J\pi a^2$ l'intensità di corrente, si ottiene $I < 2\pi m_e v_e/\mu_0 e \equiv I_A = I_0(v_e/c)$. Inserendo i valori numerici si trova $I_A = 2\pi m_e c/\mu_0 e \simeq 10^4$ A.

2

- a) Chiamando A la superficie delle armature il sistema è equivalente a due condensatori in serie di capacità rispettivamente

$$C_1 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 A}{b} \quad \text{e} \quad C_2 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_2 A}{b} \quad \text{da cui} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 A}{b(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

avremo così

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 AV}{b(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad \text{e} \quad \sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 V}{b(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

dove Q e σ sono i valori assoluti della carica e delle densità di carica sulle superfici 2, 3, 4, e 5, mentre σ sarà nulla sulle superfici 1 e 6. Ovviamente, σ_2 e σ_4 avranno lo stesso segno, opposto a quello di σ_3 e σ_5 . Per le densità di carica legate vale $\sigma_i^{\text{legata}} = -(\epsilon_r - 1)\sigma_i$, con l' ϵ_r del mezzo rispettivo. Per i campi elettrici avremo

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_1} = \frac{\epsilon_2 V}{b(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \quad \text{e} \quad E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_2} = \frac{\epsilon_1 V}{b(\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

- b) La forza per unità di superficie F_s su di un conduttore con densità superficiale di carica libera σ immerso in un dielettrico di costante dielettrica relativa ϵ_r vale

$$F_s = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad \text{quindi} \quad F_{s3} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2^2 V^2}{b^2(\epsilon_0 + \epsilon_1)^2} \quad \text{e} \quad F_{s4} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_1^2 \epsilon_2 V^2}{b^2(\epsilon_0 + \epsilon_1)^2}$$

il conduttore centrale è quindi attirato verso il dielettrico di costante ϵ_r minore.