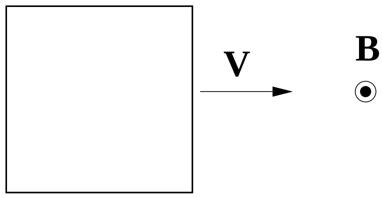
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2004-2005

Compito di Fisica bIA (11 luglio 2005)

1

Una spira conduttrice quadrata, avente resistenza R e lato ℓ, viene mantenuta in moto con velocità costante $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ in un campo magnetico non uniforme $\mathbf{B} = B_0(x/L)\hat{\mathbf{z}}$, perpendicolare alla superficie della spira.



Calcolare:

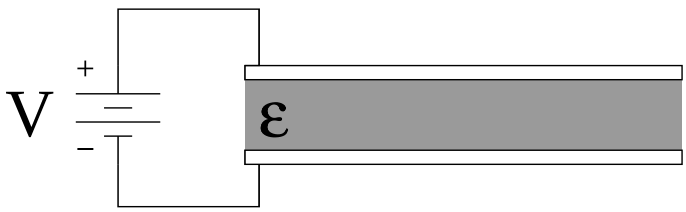
a) la corrente nella spira,

b) la potenza dissipata,

c) la forza sulla spira e la potenza meccanica da essa sviluppata.

2

Tra le armature circolari di un condensatore piano (raggio delle armature a, distanza tra le armature $h \ll a$) è mantenuta la tensione costante V. Il condensatore è riempito con un materiale dielettrico avente permittività dipendente dalla temperatura.



Riscaldando il materiale si fa passare la sua permittività dal valore ϵ_1 al valore $\epsilon_2 > \epsilon_1$ in un tempo τ secondo la legge $\epsilon(t) = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1)t/\tau$.

a) Calcolare la corrente I che scorre fra generatore e armature, per $0 < t < \tau$.

b) Calcolare la variazione dell'energia elettrostatica ed il lavoro fatto dal generatore fra $t = 0$ e $t = \tau$.

c) Come cambiano le risposte a)-b) se il generatore ha una resistenza interna R?

d) Si dica se tra $t = 0$ e $t = \tau$ viene generato campo magnetico all'interno del condensatore.

SOLUZIONI

1

a) Sia $x = vt$ la posizione del centro della spira all'istante t. Il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la spira è dato da

$$\Phi(\mathbf{B}) = \int_{x-\ell/2}^{x+\ell/2} B_0 \frac{x'}{L} \ell dx' = B_0 \frac{\ell}{L} \frac{x'^2}{2}\bigg|_{x-\ell/2}^{x+\ell/2} = B_0 \frac{x\ell^2}{L} .$$

La f.e.m. indotta è quindi

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 \frac{\ell^2}{L} \frac{dx}{dt} = -B_0 \frac{\ell^2}{L} v .$$

Quindi la corrente è

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{B_0 v}{R} \frac{\ell^2}{L} .$$

b) La potenza dissipata per effetto Joule è

$$P_d = RI^2 = \frac{B_0^2 v^2}{R} \frac{\ell^4}{L^2} .$$

c) La forza sulla spira è la risultante delle forze magnetiche sui suoi lati. Le forze sui lati paralleli non contribuiscono, quindi la forza è lungo x ed è data da

$$F = I\ell[B(x+\ell/2) - B(x-\ell/2)] = -\frac{B_0 v}{R} \frac{\ell^3}{L} B_0 \frac{\ell}{L} = -\frac{v}{R} \left(B_0 \frac{\ell^2}{L} \right)^2 .$$

Il segno meno significa che la forza si oppone al moto. La potenza meccanica è

$$P_m = Fv = -\frac{v^2}{R} \left(B_0 \frac{\ell^2}{L} \right)^2 = -P_d .$$

2

a) Per effetto della variazione di ϵ la capacità del condensatore dipende dal tempo:

$$C = C(t) = \epsilon(t) \frac{S}{h} .$$

La carica sule armature è

$$Q = CV = \epsilon(t) \frac{SV}{h} .$$

Poichè il potenziale V è costante, la corrente è

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{SV}{h} \frac{d\epsilon}{dt} = \frac{SV}{h} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\tau} .$$

b) La variazione di energia elettrostatica è

$$\Delta U_{es} = \frac{1}{2}C(\tau)V^2 - \frac{1}{2}C(0)V^2 = \frac{1}{2}\frac{S}{h}(\epsilon_2 - \epsilon_1)V^2 \, .$$

Il lavoro infinitesimo dW fatto dal generatore per spostare la carica dQ da un'armatura all'altra è

$$dW = VdQ = Vd(CV) = V^2 dC \, ,$$

e quindi in totale

$$W = V^2[C(\tau) - C(0)] = 2\Delta U_{es} \, .$$

c) Le risposte a) e b) non cambiano. Al punto c) bisogna aggiungere al lavoro fatto dal generatore l'energia dissipata per effetto Joule:

$$W = 2\Delta U_{es} + U_d = 2\Delta U_{es} + RI^2\tau \, .$$

d) Consideriamo la legge di Ampère-Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) \, .$$

Poichè il campo elettrico $E = V/h$ è costante, il secondo termine, cioè la corrente di spostamento di Maxwell, è nullo. Al primo termine contribuisce invece una corrente di polarizzazione

$$\mathbf{J}_p = \partial_t \mathbf{P} = \partial_t \chi \mathbf{E} = \mathbf{E}\partial_t(\epsilon - \epsilon_0) = \mathbf{E}\partial_t \epsilon \, .$$

[Questo è equivalente a pensare che in un dielettrico la corrente di spostamento è $\partial_t \mathbf{D} = \partial_t(\epsilon \mathbf{E})$.]

Per simmetria il campo $\mathbf{B}$ ha linee di forza solenoidali e calcolando la circuitazione su esse si ha

$$2\pi r B_\phi(r) = \pi r^2 \mu_0 E \partial_t \epsilon \, ,$$
$$B_\phi(r) = \mu_0 \frac{r}{2}\frac{V}{h}\frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\tau} = \frac{r}{2c^2\tau}E(\epsilon_{r2} - \epsilon_{r1}) \, ,$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usato $\epsilon_0\mu_0 = 1/c^2$ e $\epsilon_i = \epsilon_0 \epsilon_{r,i}$. Per effetto del fattore $r/c\tau \ll 1$ questo campo magnetico sarà in generale trascurabile.