Corso di Laurea in Fisica. Anno Accademico 2002–2003
Compitino di Fisica b1A (6 Novembre 2002)

1

Una carica puntiforme q si trova al centro di una sfera cava conduttrice di raggio interno R e spessore a. Nei due casi (a) di conduttore isolato e (b) di conduttore messo a terra [cioé collegato ad un conduttore a potenziale fissato $V_0 = 0$], calcolare

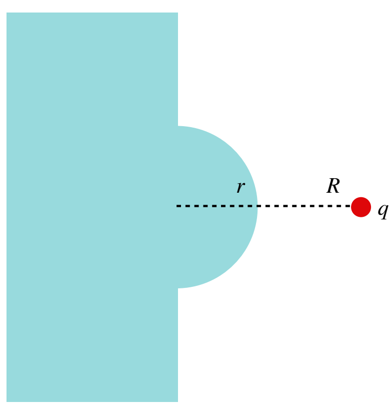
1. Il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ in tutto lo spazio;
2. Il potenziale elettrico V in tutto lo spazio;
3. La densità di carica sulle superfici interna ed esterna;
4. La pressione (ovvero la forza per unità di superficie) esercitata sulle superfici interna ed esterna.

Soluzione:

1. *Il campo è radiale. Dentro il conduttore $E = 0$. All'interno della sfera cava vale $E_r = kq/r^2$. Fuori dalla sfera vale $E_r = kq/r^2$ se la sfera è isolata, e $E = 0$ se la sfera è messa a terra.*
2. $$V_{(\mathrm{a})} = \begin{cases} k(1/r - 1/R + 1/(R+a)) & \text{per } r < R \\ k/(R+a) & \text{per } R < r < R+a \\ k/r & \text{per } r > R+a \end{cases} \qquad V_{(\mathrm{b})} = \begin{cases} k(1/r - 1/R) & \text{per } r < R \\ 0 & \text{per } R < r < R+a \\ 0 & \text{per } r > R+a \end{cases}$$
3. *In entrambi i casi $\sigma_{\mathrm{interna}} = -q/4\pi R^2$. Nel caso (a) $\sigma_{\mathrm{esterna}} = q/4\pi(R+a)^2$; nel caso (b) $\sigma_{\mathrm{esterna}} = 0$.*
4. $p = \sigma E_r/2$.

2

Un conduttore è costituito da un semipiano infinito con una sporgenza semisferica di raggio r. Una carica puntiforme q è situata lungo l'asse di simmetria a distanza R dal centro della semisfera. Assumendo che il conduttore sia messo a terra:



1. Trovando un opportuno sistema di cariche immagini, scrivere il potenziale V in tutto lo spazio.

Calcolare

2. La forza $\boldsymbol{F}$ esercitata sulla carica q;
3. Il lavoro $\mathscr{L}$ necessario per portare q a distanza infinita;
4. La densità di carica σ indotta sul conduttore.

Soluzione:

1. *Mettiamo l'asse x lungo l'asse di simmetria. Servono 3 cariche immagini: $q' = -q$ a $x = -R$, $q'' = -qr/R$ a $x = r^2/R$, $q''' = -q''$ a $x = -r^2/R$. $V = 0$ dentro il conduttore. Fuori V è il potenziale generato da q, q', q'', q'''.*
2. $$F_x = kq^2\left[-\frac{1}{(2R)^2} - \frac{r/R}{(R - r^2/R)^2} + \frac{r/R}{(R + r^2/R)^2}\right]$$
3. $$\mathscr{L} = \frac{kq^2}{2}\left[\frac{1}{2R} + \frac{r/R}{R - r^2/R} - \frac{r/R}{R + r^2/R}\right]$$

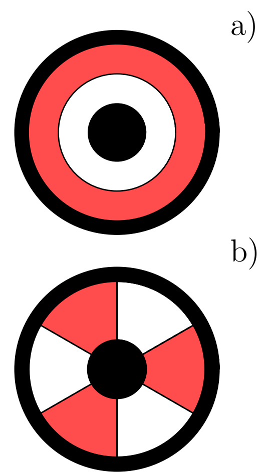
4. *Lungo la sfera*

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_r(\rho = r, \theta) = -\epsilon_0 \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right|_{\rho=r} = \frac{q(R^2 - r^2)}{4\pi r(R^2 + r^2 - 2rR\cos\theta)^{3/2}} - \frac{q(R^2 - r^2)}{4\pi r(R^2 + r^2 + 2rR\cos\theta)^{3/2}}$$

Lungo il piano a $\rho > r$

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E_x = -\frac{1}{2\pi}\frac{Rq}{(\rho^2 + R^2)^{3/2}} + \frac{1}{2\pi}\frac{rq}{(\rho^2 + (r^2/R)^2)^{3/2}}$$

3



Lo spazio compreso fra la armature di un condensatore cilindrico di raggi interno r ed esterno $R > r$ e lunghezza $L \gg R$ è parzialmente riempito da un dielettrico di costante dielettrica relativa κ che riempe la corona circolare compresa fra $(R+r)/2$ ed R, come in fig. a). Le due armature interna ed esterna contengono rispettivamente cariche totali Q e $-Q$. Calcolare:

1a. Il campo $\boldsymbol{D}$;

2a. Il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ nelle regioni occupate dal vuoto e dal dielettrico;

3a. La capacità C e l'energia elettrostatica U del condensatore.

Si consideri ora il condensatore in fig. b), dove il dielettrico riempie la regione colorata. Calcolare:

1b. Il campo elettrico $\boldsymbol{E}$;

2b. Il campo $\boldsymbol{D}$ nelle regioni occupate dal vuoto e dal dielettrico;

3b. La capacità C e l'energia elettrostatica U del condensatore.

Soluzione:

1a. Ha solo una componente radiale $\epsilon_0 D_r = 2k\lambda/r$ ($\lambda = q/L$) cioè $D_r = Q/2\pi rL$.

2a. $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\epsilon_0\kappa$.

3a. Senza dielettrico sarebbe $C = 2\pi L\epsilon_0/\ln(R/r)$. Con il dielettrico $1/C = 1/C_1 + 1/C_2$ dove $C_1 = 2\pi L\epsilon_0/\ln((R+r)/2r)$ e $C_2 = 2\pi L\kappa\epsilon_0/\ln(2R/(r+R))$. $U = Q^2/2C$.

1b. Ha solo una componente radiale $E_r = Q/\pi Lr\epsilon_0(1+\kappa)$. Il flusso di E è minore di Q, in quanto parte della carica libera viene schermata dalle cariche di polarizzazione.

2b. $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}\epsilon_0\kappa$.

3b. $C = C_1 + C_2$ dove $C_2 = \kappa C_1 = \pi L\epsilon_0/\ln(R/r)$.