Compitino di Fisica b I del 18 Novembre 2003

E' consentita la consultazione solo di libri di testo. Si spieghi in dettaglio il procedimento seguito, il significato dei vari simboli e formule adoperate. Si prega inoltre di fare attenzione alla **leggibilità** *dell'elaborato. Si faccia uso del sistema SI.*

1 Due sfere indeformabili di uguale raggio R, aventi massa M e cariche $\pm Q$ uniformemente distribuite nel proprio volume, si attraggono partendo da ferme e da distanza infinita.

a) Si calcoli l'energia iniziale del sistema.

b) Si calcoli la velocità delle sfere quando si toccano (cioè quando la distanza tra i centri è $d = 2R$).

Dopo il contatto, le sfere continuano a muoversi compenetrandosi senza attrito.

c) Mostrare che il campo elettrico nella regione di sovrapposizione delle sfere è uniforme e darne il valore in funzione della distanza d ($< 2R$) tra i centri.

d) Si calcoli la velocità delle sfere quando i centri si sovrappongono ($d = 0$).

Soluzione:

a) Il calcolo dell'energia delle due sfere, quando la distanza dei centri sia tale da non avere sovrapposizione delle rispettive distribuzioni di carica, si può scrivere come:

$$U = 2U_0 + U_{\rm int}$$

ove si è indicato con U_0 l'energia necessaria all'assemblaggio di una singola sfera e con $U_{\rm int}$ il contributo associato all'interazione delle due distribuzioni. Calcolo di U_0: si puo' costruire la sfera portando successivamente dall'infinito gusci infinitesimi concentrici. Utilizzando il teorema di Gauss, si pùscrivere:

$$U_0 = \int_0^R \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4\pi}{3}r^3\rho\frac{1}{r}\rho 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi\rho^2}{3\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0} = \frac{3}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

Calcolo di $U_{\rm int}$: se $r > 2R$ sappiamo che è conseguenza del teorema di Gauss il fatto che la forza di interazione fra le sfere è uguale a quella fra due cariche puntiformi poste nei rispettivi centri. Quindi l'energia potenziale elettrostatica totale risulta pari a:

$$U(r) = \frac{6}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r} \qquad \textit{per } r \geq 2R.$$

b) Si conserva sia l'impulso totale che l'energia del sistema e pertanto:

$$\frac{2}{2}Mv^2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2R} \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{2MR}}$$

c) Il campo elettrico all'interno di una sfera uniformemente carica vale, per il teorema di Gauss

$$\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\vec{r},$$

quindi, in un punto dell'intersezione tra le due sfere avremo per il campo complessivo

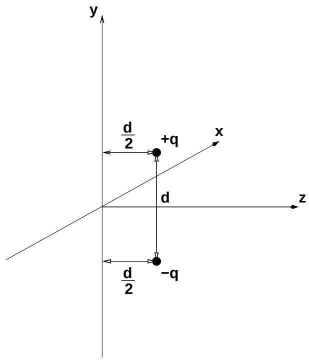
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\vec{r}_1 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-Q}{R^3}\vec{r}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\vec{d}$$

dove $\vec{r}_1$ è la distanza del punto dal centro della sfera positiva, $\vec{r}_2$ la distanza dal centro della sfera negativa, e $\vec{d}$ la distanza del centro della sfera negativa da quello della sfera positiva.

d) Nel momento in cui i centri delle sfere sono coincidenti, le due cariche e i rispettivi campi si elidono. L'energia della configurazione risulta $U(0) = 0$ e pertanto, con le medesime considerazioni utilizzate per il calcolo al punto b, si ha:

$$\frac{2}{2}Mv^2 = U(\infty) = 2U_0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{MR}}.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ Due cariche puntiformi $Q_1 = q$ e $Q_2 = -q$ sono poste di fronte ad un piano conduttore infinito e messo a terra. Le due cariche sono poste a distanza d l'una dall'altra ed entrambe a distanza $d/2$ dal piano. Calcolare:



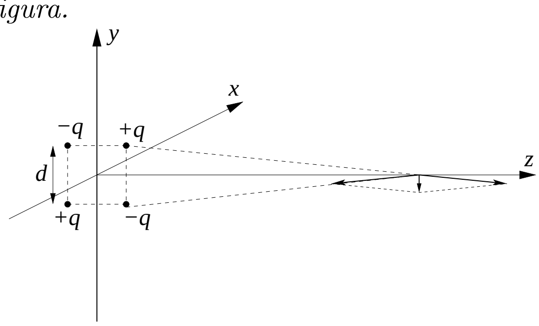
a) la forza totale esercitata dalle cariche sul piano;

b) il campo elettrico sull'asse z a distanza $z \gg d$ dal piano (vedi figura);

c) la densità superficiale $\sigma(x, y)$ di carica indotta sul piano conduttore lungo la retta $x = 0$;

d) l'energia elettrostatica del sistema.

Soluzione: *Il sistema di cariche immagini è mostrato in figura.*



a) La forza che le cariche esercitano sul piano è uguale ed opposta alla forza che il piano esercita sulle cariche:

$$\mathbf{F}_{1+2\to\text{piano}} = -\mathbf{F}_{\text{piano}\to1+2} = -(q\cdot\mathbf{E}_1 - q\cdot\mathbf{E}_2)$$

ove $\mathbf{E}_\mathrm{i}$ indica il campo determinato, nella posizione della carica i-esima, dalle altre cariche presenti nel sistema. Utilizzando la tecnica delle cariche immagini si ha:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\text{piano}\to1+2} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[q\cdot\left(-\frac{q}{d^2}\hat{\mathbf{z}} + \frac{q}{2d^2}\frac{\hat{\mathbf{z}}+\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\right) - q\cdot\left(\frac{q}{d^2}\hat{\mathbf{z}} - \frac{q}{2d^2}\frac{\hat{\mathbf{z}}-\hat{\mathbf{y}}}{\sqrt{2}}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}\left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

il cui opposto è la forza richiesta.

b) Il calcolo del campo elettrico lungo l'asse z può essere effettuato calcolando prima il campo dovuto alle due cariche reali, poi quello dovuto alle cariche immagini. Per il contributo delle cariche reali (vedi figura) avremo un campo diretto secondo il verso negativo dell'asse y $E_y^{(r)}$, mentre le cariche immagine genereranno un campo $E_y^{(i)}$ positivo

$$E_y^{(r)} = -\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \qquad E_y^{(i)} = +\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[\left(z+\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ed il campo complessivo sarà la somma dei due. Per $z \gg d$ possiamo usare gli sviluppi in serie di Taylor al primo ordine

$$\left[\left(z \pm \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{z^3} \mp \frac{3}{2}\frac{d}{z^4}$$

ottenendo per il campo lungo l'asse z

$$\vec{E}(z) \approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3qd^2}{z^4}\hat{y}$$

c) *Con un ragionamento analogo a quello fatto per calcolare il campo elettrico lungo l'asse z, abbiamo per il campo lungo l'asse y (ovviamente nel semizpazio delle cariche reali, ma subito a contatto col piano conduttore):*

$$\vec{E}(y) = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\left\{-\frac{1}{\left[\left(y-\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left[\left(y+\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}\hat{z}$$

con y che potrà essere sia positivo che negativo. Per il teorema di Gauss, la densità superficiale di carica $\sigma(0, y, 0)$ lungo l'asse y si ottiene moltiplicando il modulo di $\vec{E}(y)$ per ε_0.

d) *Se la configurazione fosse costituita da quattro cariche reali nelle posizioni della figura l'energia potrebbe essere calcolata dal lavoro per costruire la configurazione come*

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i<j}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d}\left(4-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

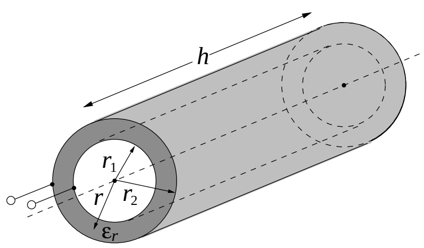
Poiché abbiamo a che fare con cariche immagini, l'energia della configurazione sarà la metà di quella calcolata sopra (questo può anche essere visto dal fatto che l'integrale $\int \varepsilon_0\frac{E^2}{2}d\tau$ va calcolato solo nel semispazio a destra del piano conduttore). Quindi

$$U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d}\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Lo spazio tra le armature di un condensatore cilindrico, di altezza h e raggi r_1 e r_2 ($r_1 < r_2$, e $h \gg r_2 - r_1$), è riempito di un materiale isolante non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa varia con r secondo la legge

$$\varepsilon_r = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_2 - r_1}(r - r_1)$$

dove r è la distanza dall'asse comune delle due armature. Il condensatore ha una carica Q.



a) Calcolare la capacità del condensatore. Per questo può essere utile l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\log\left(\frac{a+bx}{x}\right).$$

b) Calcolare l'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore.
c) Calcolare, su tutto lo spazio, la densità di energia elettrostatica per unità di volume.
d) Calcolare le densità di carica di polarizzazione, sia superficiali che di volume, presenti nel dielettrico. Ricordare che, in coordinate cilindriche,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Soluzione:

a) *Il condensatore può essere visto come una serie di condensatori cilindrici concentrici tra r e $r + dr$, per ognuno dei quali*

$$d\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{dr}{2\pi rh\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

L'inverso della capacità totale vale quindi

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\pi h\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\varepsilon_r r} = \frac{1}{2\pi h\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r(a+br)}, \quad \textit{dove } a = \frac{\varepsilon_1 r_2 - \varepsilon_2 r_1}{r_2 - r_1} \quad \textit{e} \quad b = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_2 - r_1}$$

da cui
$$\frac{1}{C}=\frac{1}{2\pi h\varepsilon_0}\frac{1}{a}\log\left[\frac{(a+br_1)r_2}{(a+br_2)r_1}\right]=\frac{1}{2\pi h\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{\varepsilon_1 r_2-\varepsilon_2 r_1}\log\left(\frac{\varepsilon_1 r_2}{\varepsilon_2 r_1}\right)$$
da cui
$$C=\frac{2\pi h\varepsilon_0(\varepsilon_1 r_2-\varepsilon_2 r_1)}{(r_2-r_1)\log(\varepsilon_1 r_2/\varepsilon_2 r_1)}$$

b)
$$U=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{Q^2}{2}\frac{1}{2\pi h\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{\varepsilon_1 r_2-\varepsilon_2 r_1}\log\left(\frac{\varepsilon_1 r_2}{\varepsilon_2 r_1}\right)$$

c) $u=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$ *tra le armature, 0 fuori.* $\vec{D}$ *e* $\vec{E}$ *sono ambedue sempre diretti lungo la coordinata cilindrica* r*, ed i loro moduli valgono*
$$D=\frac{Q}{2\pi hr},\quad E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q(r_2-r_1)}{2\pi\varepsilon_0 hr[(\varepsilon_1 r_2-\varepsilon_2 r_1)+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)r]}$$

d) La polarizzazione per unità di volume $\vec{P}$ *è nulla fuori dalle armature, mentre tra le armature vale* $\vec{P}=\varepsilon_0\chi\vec{E}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}=(1-1/\varepsilon_r)\vec{D}$*. Quindi anche* $\vec{P}$ *è diretta lungo* r*, ed in modulo vale*
$$P=\left[1-\frac{r_2-r_1}{(\varepsilon_1 r_2-\varepsilon_2 r_1)+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)r}\right]\frac{Q}{2\pi hr}.$$
Facendo l'ipotesi che l'armatura interna sia carica positivamente, a contatto di essa la densità superficiale di carica di polarizzazione vale
$$\sigma_{p1}=-\left(1-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\frac{Q}{2\pi hr_1}$$
mentre a contatto dell'armatura esterna
$$\sigma_{p2}=\left(1-\frac{1}{\varepsilon_2}\right)\frac{Q}{2\pi hr_2}$$
la densità di carica di polarizzazione per unità di volume vale invece
$$\rho_p=\frac{1}{r}\frac{\partial\,(rP_r)}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{Q}{2\pi h}\frac{\partial}{\partial r}\left[1-\frac{r_2-r_1}{(\varepsilon_1 r_2-\varepsilon_2 r_1)+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)r}\right]$$
$$\rho_p=\frac{Q}{2\pi hr}\frac{(\varepsilon_2-\varepsilon_1)(r_2-r_1)}{[(\varepsilon_1 r_2-\varepsilon_2 r_1)+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)r]^2}$$