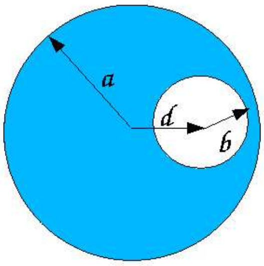
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2003-2004

Compito di Fisica bIA (15 novembre 2004)

1

Una sfera di raggio a e densità uniforme di carica elettrica ρ ha al suo interno una cavità sferica di raggio $b < a/2$, il cui centro è a distanza d dal centro della sfera.



a) Calcolare il campo elettrico all'interno della cavità mostrando che esso è uniforme.

La sfera viene posta in un campo elettrico *esterno* uniforme $\mathbf{E}$.

Calcolare

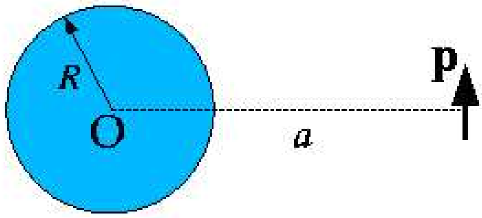
b) la forza sulla sfera,

c) il momento della forza rispetto al centro della sfera.

d) Si diano i risultati dei punti a)-c) nel caso $d = 0$ (cavità concentrica alla sfera).

2

Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è posto a distanza a da una sfera conduttrice di raggio R. La direzione del dipolo è perpendicolare alla retta che congiunge il dipolo dal centro O della sfera. La sfera conduttrice è posta a terra.



Trovare:

a) il potenziale elettrico in tutto lo spazio;

b) la forza tra sfera e dipolo;

c) la carica totale indotta sulla sfera.

d) Si dica se le risposte a)-c) cambiano nel caso di sfera isolata e scarica.

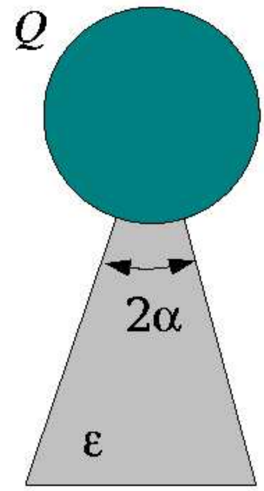
3

Una sfera conduttrice di raggio R possiede una carica Q ed è posta su un supporto conico di apertura 2α composto da materiale dielettrico con permittività ε. Il vertice del cono coincide col centro della sfera.
Calcolare:

a) il campo elettrico in tutto lo spazio,

b) le densità di carica libera e polarizzazione alla superficie di contatto.

c) Si dica se c'è una forza elettrica netta sulla sfera e se ne diano il verso ed il valore.



Soluzioni

1

a) La sfera carica con una cavità interna può essere rappresentata per mezzo di una sfera piena con densità di carica uguale a quella iniziale sovrapposta ad una sfera uguale alla cavità e con densità di carica di segno opposto.
Per mezzo del teorema di Gauss si dimostra che il campo elettrico interno ad una sfera uniformemente carica è dato da $\mathbf{E} = \rho\mathbf{r}/3\varepsilon_0$. Si noti che il campo è radiale ed il modulo è proporzionale alla distanza dal centro.
Il campo elettrico in un punto P interno alla cavità è quindi dato da due contributi, uno radiale rispetto al centro della sfera ed uno radiale rispetto al centro della cavità di segno opposto al primo. Il campo risultante è proporzionale alla somma vettoriale dei due contributi ed è uniforme in tutta la cavità. Dunque, si veda anche la figura 1, $\mathbf{E}_{cav.} = \rho(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/3\varepsilon_0 = \rho\mathbf{d}/3\varepsilon_0$.

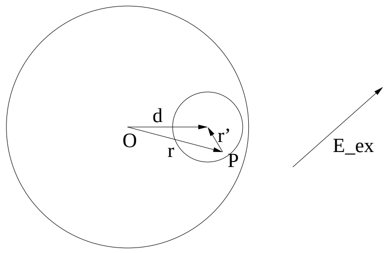


Figura 1:

b) Dato un campo esterno $\mathbf{E}_{ex}$ la forza risultante sulla sfera è data dalla sommatoria della forze sulle singole cariche. $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}_{ex}$ dove Q è la carica totale. Quindi $\mathbf{F} = \frac{4}{3}\pi\rho(a^3 - b^3)\mathbf{E}_{ex}$. La forza è la stessa che si avrebbe considerando due cariche puntiformi poste rispettivamente al centro della sfera e della cavità.

c) Schematizzando il sistema con due cariche poste rispettivamente nell'origine e nel centro della cavità si ha che solo la forza esercitata su quest'ultima ha momento diverso da zero (rispetto al centro della sfera). Dunque $\tau = \mathbf{d} \times \mathbf{F} = -\frac{4}{3}\pi\rho b^3\mathbf{d} \times \mathbf{E}_{ex}$.

d) Nel caso di cavità concentrica si ha che (i) il campo elettrico interno è nullo, si può vedere sia applicando il teorema di Gauss, sia utilizzando il risultato trovato precedentemente ponendo $\mathbf{d} = \mathbf{0}$; (ii) la forza esercitata sulla sfera è la stessa perché dipende dalla carica totale Q, la quale non dipende dalla posizione della cavità all'interno della sfera; (iii) il momento della forza è nullo e si vede sia per ovvie ragioni di simmetria sia ponendo $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ nel risultato già trovato.

2

a) Il problema può essere risolto con il metodo delle immagini. Sostituiamo il dipolo con due cariche $+q$ e $-q$ a distanza h tra di loro disposte come nella figura, dove le dimensioni di h sono state esagerate per rendere comprensibile il disegno. Alla fine faremo tendere h a 0 e q all'infinito mantenendo costante il prodotto $qh = p$. Ad ognuna delle due cariche del dipolo corrisponde

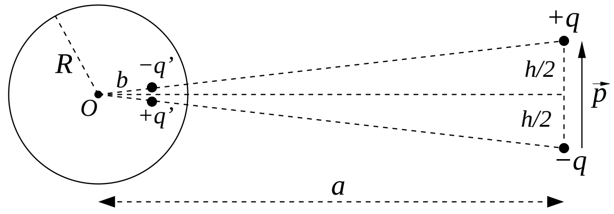


Figura 2:

una carica immagine all'interno della sfera, disposte come in Fig. 2. Se la sfera non è collegata a terra, ognuna delle due cariche reali genera anche una carica immagine al centro della sfera, ma queste due ultime immagini si cancellano. Nell'approssimazione $h \ll a$ avremo $q' = q(R/a)$, e la distanza b delle immagini dal centro della sfera sarà $b = R^2/a$. Usando le proporzioni tra triangoli simili, la separazione tra le cariche imagini sarà $h' = h(b/a) = h(R^2/a^2)$. Avremo quindi un dipolo immagine di momento $p' = -p(R^3/a^3)$. Il potenziale ed il campo elettrico in tutto lo spazio al di fuori dalla sfera saranno quelli generati dai due dipoli $\vec{p}$ e $\vec{p'}$. All'interno della sfera il campo elettrico sarà nullo, ed il potenziale costante. Per motivi di simmetria, il potenziale è nullo su tutta la retta definita dal centro della sfera e dal dipolo, quindi è nullo il potenziale della sfera.

b) Prendiamo un sistema di coordinate con l'origine nel centro della sfera, l'asse x sulla retta passante per il dipolo reale, e l'asse z parallelo a $\vec{p}$ (antiparallelo a $\vec{p'}$). In questo sistema le coordinate del dipolo reale sono $(x, 0, 0)$ con $x = a$. Il campo elettrico generato dalla sfera (dipolo immagine) sul dipolo reale vale

$$E_z = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p'}{(x-b)^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}p\frac{R^3}{x^3}\frac{1}{\left(x - \frac{R^2}{x}\right)^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pR^3}{(x^2-R^2)^3}.$$

La forza esercitata sul dipolo reale vale $\vec{F} = -\vec{\nabla}(\vec{E} \cdot \vec{p})$

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p^2R^3}{(x^2-R^2)^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{6p^2x}{(x^2-R^2)^4}.$$

Per il terzo principio della dinamica, la forza esercitata dal dipolo sulla sfera è uguale ed opposta alla forza esercitata dalla sfera sul dipolo.

c) La carica totale indotta sulla sfera è uguale, per il teorema di Gauss, alla somma delle cariche immagine ed è quindi nulla, valendo le due cariche immagine $-q'$ e $+q'$.

d) Come visto al punto precedente la carica indotta è zero e quindi il caso di sfera isolata e scarica è identico al caso di sfera messa a terra.

3

a) I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{D}$ sono radiali. Poichè $\mathbf{E}$ è tangenziale alle superfici di discontinuità, $\mathbf{E}$ è continuo. Quindi $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$. Il campo $\mathbf{D}$ è discontinuo e si può scrivere $\mathbf{D} = D_1(r)\hat{\mathbf{r}}$ con $D_1 = \varepsilon E$ per $0 < \theta < \alpha$ (cioè nella regione del cono dielettrico) e $\mathbf{D} = D_2(r)\hat{\mathbf{r}}$ con $D_2 = \varepsilon_0 E$ per $\alpha < \theta < \pi$

cioè nella regione di vuoto. Il teorema di Gauss per $\mathbf{D}$ su una superficie sferica di raggio r attorno alla sfera fornisce quindi

$$D_1(r)\Omega r^2 + D_2(r)(4\pi - \Omega)r^2 = Q\,,$$

dove Ω è l'angolo solido sotteso dalla superficie di contatto tra cono e sfera, dato da

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta = 2\pi(1-\cos\alpha).$$

Si ottiene

$$[\varepsilon\Omega + \varepsilon_0(4\pi - \Omega)]E(r)r^2 = Q,$$

ovvero

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2[(\varepsilon_r - 1)\Omega/4\pi + 1]}.$$

b) La densità superficiale di carica libera è uguale al valore di D alla superficie, quindi $\sigma_1^{(lib)} = D_1(R) = \varepsilon E(R)$, $\sigma_2^{(lib)} = D_2(R) = \varepsilon_0 E(R)$. La densità di carica *totale* $\sigma = \sigma^{(lib)} + \sigma^{(pol)}$ è uguale al valore di $\varepsilon_0 E$ alla superficie. Segue che $\sigma_2^{(pol)} = 0$ mentre $\sigma_2^{(pol)} = (\varepsilon_0 - \varepsilon)E(R)$.

c) La pressione elettrostatica sulla superficie della sfera è data da $P = \sigma^{(lib)}E(R)/2$ ed è diretta radialmente. Si ha $P_1 = \varepsilon E^2(R)/2 > P_2 = \varepsilon_0 E^2(R)/2$. Quindi l'esistenza di una pressione maggiore sulla superficie a contatto col dielettrico implica che la forza è diretta verso il basso.

Per calcolarne il valore, calcoliamo l'integrale dello sbilancio di pressione $\delta P = P_1 - P_2$ sulla superficie di contatto. Per simmetria la forza totale è ovviamente diretta in verticale, e in ogni punto la componente verticale è data da $\delta P \cos\theta$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} F = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta \delta P \cos\theta &= 2\pi \int_0^{\alpha} \sin\theta d\theta (\varepsilon - \varepsilon_0)\frac{E^2(R)}{2}\cos\theta \\ &= \frac{\pi}{2}R^2(\varepsilon - \varepsilon_0)E^2(R)(1-\cos^2\alpha). \end{aligned}$$