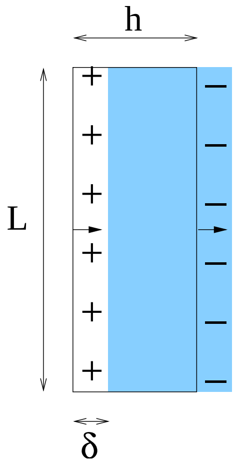
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2005-2006

Compito di Fisica b1A (8/11/2005)

1

Una lastra metallica a base quadrata, di lato L e spessore $h \ll L$ è costituita da elettroni, aventi carica $-e$, massa m_e e densità $n_e = n$, e ioni aventi carica $+Ze$ e densità $n_i = n_e/Z$, cosicchè il sistema è neutro ($\rho = Zen_i - en_e = 0$). Per effetto di una forza opportuna, tutti gli elettroni vengono spostati rigidamente in direzione perpendicolare alla lastra, per una lunghezza $\delta < h$. Si assume che la densità sia degli elettroni che degli ioni sia costante, che gli ioni siano immobili e gli effetti di bordo siano trascurabili.
Calcolare:



a) il campo elettrostatico generato dallo spostamento degli elettroni;

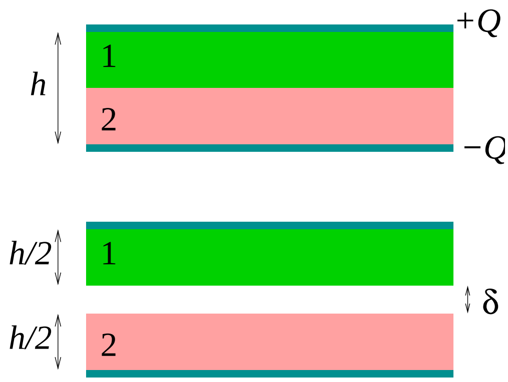
b) l'energia elettrostatica associata al campo.

Si rimuove ora la forza esterna e si osserva che la "lastra degli elettroni" oscilla rispetto alla propria posizione di equilibrio.

c) Calcolare la frequenza di oscillazione, nel limite di piccoli spostamenti ($\delta \ll h$).

2

Un condensatore piano, aventi armature parallele quadrate di lato L distanti fra loro $h \ll L$, è completamente riempito da due strati di spessore $h/2$ composti da materiali dielettrici avente rispettivamente permittività $\epsilon_1 = \epsilon_{r,1}\epsilon_0$ e $\epsilon_2 = \epsilon_{r,2}\epsilon_0$, con $\epsilon_{r,i} > 1$.
Sulle armature si trova una carica libera $Q = \sigma L^2$ e il sistema è isolato.
Si immagina ora di dividere il condensatore allontanandone le due metà di un tratto δ: in questa configurazione tra i due strati dielettrici è quindi presente uno strato di suscettività dielettrica nulla.



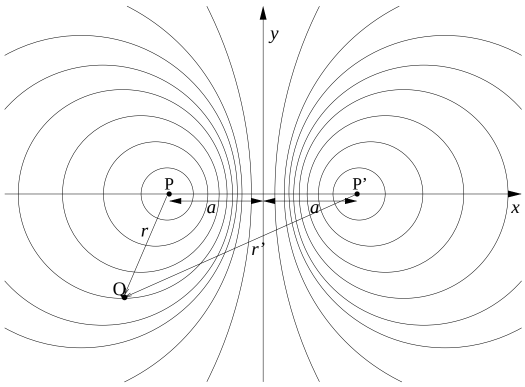
Calcolare, trascurando gli effetti di bordo

a) la variazione di energia elettrostatica,

b) la forza richiesta per separare le due metà del condensatore.

c) Si risponda di nuovo alle domande a)-b) nel caso in cui il sistema non sia isolato ma le armature siano connesse da un generatore che mantiene fra esse un potenziale fissato V.

3

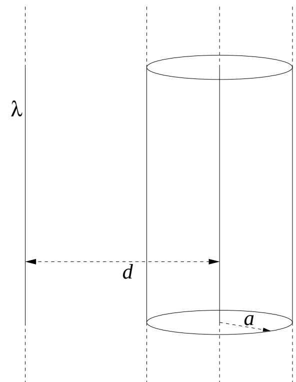


Si considerino due punti P e P' su un piano. Per un punto generico Q del piano siano $r = \overline{PQ}$ e $r' = \overline{PQ'}$ le distanze rispettivamente da P e P'. Si può dimostrare che la famiglia di curve definita dall'equazione

$$\ln\left(\frac{r}{r'}\right) = K\,,$$

dove K è una costante, è costituita da un insieme di circonferenze come in figura.

a) Si usi questo risultato geometrico per dimostrare che le superfici equipotenziali del campo generato da due fili paralleli e infiniti, aventi densità lineare di carica λ e $-\lambda$, sono dei cilindri (la cui sezione nel piano ortogonale al piano dà le curve della figura precedente).



b) Si usi ora il risultato del punto a) per risolvere *qualitativamente*, usando il metodo delle immagini, il problema del potenziale per un filo rettilineo infinito avente densità lineare di carica costante λ che si trova di fronte ad un cilindro conduttore infinito di raggio a. Il filo è parallelo all'asse del cilindro, da cui dista d, con $d > a$.

c) Si risolva ora il punto b) *quantitativamente*, ovvero, assegnato il filo carico a distanza d dal cilindro, si calcoli la distribuzione spaziale delle cariche immagini.

SOLUZIONI

1

a) Per effetto dello spostamento degli elettroni, la densità di carica ha la distribuzione spaziale

$$\rho(x) = \begin{cases} +en & (0 < x < \delta)\,, \\ 0 & (\delta < x < h\,,\; x < 0\,,\; x > h+\delta)\,, \\ -en & (h < x < h+\delta)\,. \end{cases}$$

Da questa distribuzione, usando l'equazione $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = \partial_x E_x = \rho/\epsilon_0$, otteniamo l'andamento del campo elettrico:

$$E_x(x) = \frac{en}{\epsilon_0}\begin{cases} x & (0 < x < \delta)\,, \\ \delta & (\delta < x < h)\,, \\ h+\delta-x & (h < x < h+\delta)\,, \\ 0 & (x < 0\,,\; x > h+\delta)\,. \end{cases}$$

b) Per ottenere l'energia elettrostatica integriamo la "densità di energia" $u = (\epsilon_0/2)E_x^2$ su tutto il volume:

$$\begin{aligned} U_{es} &= \int \frac{\epsilon_0}{2}E_x^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2}L^2\int_0^{h+\delta} E_x^2 dx \\ &= \frac{\epsilon_0}{2}L^2\left(\frac{en}{\epsilon_0}\right)^2\left(\int_0^{\delta} x^2 dx + \int_\delta^h \delta^2 dx + \int_h^{h+\delta}(h+\delta-x)^2 dx\right) \\ &= \frac{(enL)^2}{2\epsilon_0}\left[\frac{\delta^3}{3} + \delta^2(h-\delta) + \frac{\delta^3}{3}\right] = \frac{(enL)^2}{2\epsilon_0}\left(h\delta^2 - \frac{\delta^3}{3}\right)\,. \end{aligned}$$

Si è usato $dV = L^2 dx$.

c) Nel limite $\delta \ll h$ si ha $U_{es} \simeq (enL)^2 h\delta^2/2\epsilon_0$, ovvero la forma caratteristica dell'energia potenziale di un oscillatore armonico. (Notare che l'espressione di U_{es} è la stessa anche quando gli elettroni si spostano nella regione $x < 0$.)
La forza sulla lastra elettronica è

$$F = -\frac{\partial U_{es}}{\partial \delta} = -\frac{(enL)^2 h\delta}{\epsilon_0}\,.$$

L'equazione del moto della lastra ha quindi la forma dell'equazione dell'oscillatore armonico:

$$M\ddot{\delta} = F \equiv -M\omega^2\delta\,,$$

dove $M = m_e n L^2 h$ è la massa totale della lastra. Otteniamo quindi

$$\omega^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}\,,$$

ovvero ω è la frequenza di plasma del metallo.

Allo stesso risultato si poteva arrivare considerando l'equazione del moto degli elettroni nel campo elettrico (1), tenendo conto che per il teorema di Gauss il campo sugli elettroni nello strato superficiale è proporzionale allo spostamento.

2

a) Il vettore $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ è normale alle superfici di separazione, quindi esso risulta continuo e vale $D = \sigma$, sia prima che dopo la separazione del dielettrico. Quindi, all'interno degli strati dielettrici il campo elettrico vale sempre $E_i = D/\epsilon_i$ $(i = 1, 2)$, mentre, dopo la separazione, nell'interstizio vale $E_0 = D/\epsilon_0$. La variazione di energia elettrostatica è quindi dovuta interamente all'energia elettrostatica contenuta nel volume $V_c = L^2\delta$ compreso tra i due strati:

$$\Delta U_{es} = \frac{\epsilon_0}{2}E_0^2 V_c = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}L^2\delta\,. \tag{1}$$

Notare che essa è indipendente da ϵ_i.

Un altro modo di ottenere la (1) consiste nell'osservare che la separazione dei due dielettrici è equivalente ad inserire un nuovo condensatore di capacità $C_0 = \epsilon_0 L^2/\delta$ in serie cosicchè

$$U_{es,i} = \frac{Q^2}{2C} \to \frac{Q^2}{2}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_0}\right) = U_{es,i} + \frac{Q^2}{2C_0} = U_{es,i} + \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}L^2\delta\,,$$

essendo $Q = L^2\sigma$.

b) La forza richiesta è la derivata di ΔU_{es} rispetto allo spostamento, ed è quindi costante: infatti dalla (1)

$$F = -\frac{\partial \Delta U_{es}}{\partial \delta} = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}L^2\,. \tag{2}$$

Il segno negativo indica che si deve compiere lavoro per separare le due metà, in quanto esse si attraggono.

c) Si ha ancora $D = \epsilon_0 E_0 = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_2 E_2$. Poiché la caduta di potenziale fra le armature è uguale all'integrale di linea del campo elettrico, abbiamo il vincolo

$$V = E_1\frac{h}{2} + E_0\delta + E_2\frac{h}{2} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{h}{2\epsilon_{r,1}} + \frac{h}{2\epsilon_{r,2}} + \delta\right) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{h}{2\bar{\epsilon}_r} + \delta\right)\,,$$

dove si è posto $\bar{\epsilon}_r \equiv \epsilon_{r,1}\epsilon_{r,2}/(\epsilon_{r,1} + \epsilon_{r,2})$. Da qui ricaviamo σ in funzione di V e quindi i valori del campo elettrico. L'energia elettrostatica è data da

$$U_{es} = \frac{\epsilon_1}{2}E_1^2 L^2\frac{h}{2} + \frac{\epsilon_0}{2}E_0^2 L^2\delta + \frac{\epsilon_2}{2}E_2^2 L^2\frac{h}{2} = \frac{\epsilon_0 V^2 L^2}{2(h/2\bar{\epsilon}_r + \delta)}\,.$$

Questa espressione è equivalente a $U_{es} = C_{tot}V^2/2$ dove

$$C_{tot} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} = \left(\frac{h}{2\epsilon_1 L^2} + \frac{\delta}{\epsilon_0 L^2} + \frac{h}{2\epsilon_2 L^2}\right)^{-1} = \frac{\epsilon_0 L^2}{h/2\bar{\epsilon}_r + \delta}. \tag{3}$$

Poiché il processo avviene a potenziale costante, per uno spostamento $\Delta\delta$ il generatore fa un lavoro pari al doppio della variazione di energia elettrostatica ΔU_{es} e la variazione di energia totale è $\Delta U_{tot} = -\Delta U_{es}$. Otteniamo per la forza

$$F = -\frac{\partial \Delta U_{tot}}{\partial \delta} = +\frac{\partial \Delta U_{es}}{\partial \delta} = -\frac{\epsilon_0 V^2 L^2}{2(h/2\bar{\epsilon}_r + \delta)^2}\,.$$

3

a) Dal teorema di Gauss sappiamo che il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico generati da un filo rettilineo infinito di densità lineare di carica λ valgono, a distanza r dal filo stesso

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,, \qquad V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + K, \quad \text{con} \quad K = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r_0\,,$$

dove r_0 è la distanza arbitraria a cui si pone $V = 0$. Quindi, il potenziale risultante dalla somma dei potenziali di due fili paralleli è

$$V_{tot} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{r}{r_0} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{r'}{r_0} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{r}{r'}\,.$$

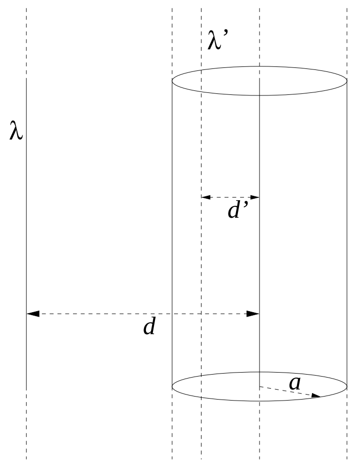
Quindi l'equazione delle superfici equipotenziali è del tipo

$$\log\frac{r}{r'} = \text{cost.}\,,$$

che è del tipo cercato.

b)

La soluzione del problema si trova ponendo un filo immagine di carica $\lambda' = -\lambda$ all'interno del cilindro, in posizione tale che, riferendosi alle curve equipotenziali definite da $\ln(r/r') = \text{cost.}$, il filo reale ed il filo immagine si trovino nelle posizioni P e P', e la superficie del cilindro coincida con l'opportuna superficie equipotenziale (questo è sempre possibile finchè $d > a$). In questa maniera il cilindro si trova ad un potenziale costante V_0. Si può fissare un valore a piacere (in particolare, un valore nullo) per il potenziale aggungendo un secondo filo con densità di carica opportuna λ'' sull'asse del cilindro.



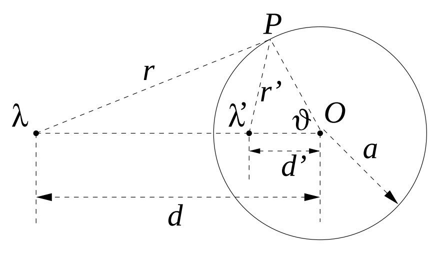
c) Verifichiamo direttamente che ponendo un filo immagine di densità di carica λ' a distanza d' opportuna dall'asse del cilindro risolve il problema del potenziale.

Dobbiamo imporre che il potenziale sia costante su tutta la superficie del cilindro, cioè che

$$\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\log r + \frac{\lambda'}{2\pi\varepsilon_0}\log r' = \text{cost.}\,,$$

ovvero

$$\lambda\log r + \lambda'\log r' = \text{cost.}$$



Esprimendo r ed r' con il teorema di Pitagora generalizzato abbiamo

$$\lambda\log\left(\sqrt{d^2 + a^2 - 2ad\cos\vartheta}\right) + \lambda'\log\left(\sqrt{d'^2 + a^2 - 2ad'\cos\vartheta}\right) = \text{cost.}$$

Derivando entrambi i membri rispetto a ϑ si ottiene

$$\frac{\lambda a d \sin\vartheta}{d^2 + a^2 - 2ad\cos\vartheta} = -\frac{\lambda a d' \sin\vartheta}{d'^2 + a^2 - 2ad'\cos\vartheta}$$

Da cui vediamo che λ' deve avere segno opposto a λ. Dividendo a destra ed a sinistra per a e razionalizzando otteniamo

$$\lambda d \left(d'^2 + a^2 - 2ad'\cos\vartheta\right) = -\lambda' d' \left(d^2 + a^2 - 2ad\cos\vartheta\right)$$

che possiamo riscrivere

$$\lambda \left(dd'^2 + da^2 - 2add'\cos\vartheta\right) = -\lambda' \left(d'd^2 + d'a^2 - 2add'\cos\vartheta\right),$$

che è verificata, indipendentemente dal valore di ϑ, se $\lambda' = -\lambda$ e se

$$dd'^2 + da^2 - 2add'\cos\vartheta = d'd^2 + d'a^2 - 2add'\cos\vartheta.$$

Il termine in $\cos\vartheta$ si cancella da entrambi i membri, e per d' si ha la soluzione ovvia $d' = d$ e la soluzione che ci interessa $d' = a^2/d$.