

Corso di Laurea in Fisica  
Anno Accademico 2003-2004

---

---

**Compito di Fisica bIA (16 settembre 2004)**

---

---

**1**

Il campo magnetico della terra è con discreta approssimazione un campo di dipolo. Il suo valore massimo alla superficie è circa  $7.5 \times 10^{-5}$  T.

a) Sapendo che il raggio della terra è  $R_T = 6400$  km, calcolare il momento magnetico terrestre.

Un satellite si muove su un'orbita equatoriale (rispetto all'asse magnetico) con velocità  $v \simeq 8$  km/sec a distanza costante  $h \simeq 100$  km dalla superficie della terra. Dal satellite pende un filo metallico lungo  $\ell = 1$  km e orientato lungo la direzione radiale.

b) Si calcoli la differenza di potenziale ai capi del filo.

**2**

Tra le armature metalliche circolari di un condensatore piano (avente raggio  $a$  e distanza tra le armature  $h \ll a$ ) si trova un materiale dielettrico non omogeneo, con costante dielettrica dipendente dalla distanza  $r$  dall'asse del sistema:

$$\epsilon_r(r) = \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{r}{a}.$$

Tra le armature si mantiene una differenza di potenziale costante  $V$ .

Calcolare:

- a) la capacità del condensatore;
- b) il campo elettrico all'interno del condensatore;
- c) le densità di carica libera e di polarizzazione alle superfici;
- d) la forza tra le armature.

# Soluzioni

## 1

- a) Il valore massimo del campo magnetico di un dipolo a distanza  $r$  da esso si ha sull'asse del dipolo stesso. Per un dipolo  $\mathbf{m}$  orientato lungo  $z$  si ha

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{4\pi} \left( \frac{3z^2 - r^2}{r^5} \right),$$

e quindi il valore massimo si trova ai poli magnetici e si ottiene dalla formula precedente ponendo  $r = z = R_T$ :

$$B_{max} = \frac{\mu_0 m}{2\pi R_T^3},$$

da cui

$$m = \frac{2\pi}{\mu_0} R_T^3 B_{max} = 0.98 \times 10^{14} \text{ unità SI.}$$

- b) Nel piano equatoriale ( $z = 0$ ) il campo è diretto lungo  $z$  e vale

$$B_0(r) = -\frac{\mu_0 m}{4\pi r^2}.$$

La d.d.p. cercata è data dall'integrale di linea sul filo metallico

$$V = \int_{\text{filo}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \int_h^{h-\ell} dr v B_0(r)$$

che può essere eseguito senza problemi. Tuttavia, notando che  $\ell \ll h \ll R_T$ , si può stimare con buona approssimazione

$$V \simeq v \ell B_0(R_T) = 300 \text{ Volts,}$$

essendo  $B_0(R_T) = B_{max}/2$ .

## 2

- a) Il condensatore può essere scomposto in condensatori piani e paralleli infinitesimi con superfici a corona circolare, collegati in parallelo. Il contributo infinitesimo alla capacità è

$$dC = \epsilon_0 \epsilon_r(r) \frac{dA}{h} = \epsilon_0 \left[ \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{r}{a} \right] \frac{2\pi r dr}{h}$$

Integrando otteniamo

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 a^2}{h} \left[ \frac{\epsilon_1}{6} + \frac{\epsilon_2}{3} \right]$$

- b) Il campo elettrico è uniforme all'interno del condensatore, e, in modulo, vale  $E = V/h$ ;  
c) La polarizzazione vale  $\vec{P} = (\epsilon_r - 1)\epsilon_0 \vec{E}$ , quindi dipende da  $r$ . La densità superficiale di carica di polarizzazione vale  $\sigma_p = P_\perp$ . In modulo abbiamo

$$|\sigma_p| = \epsilon_0 \left[ \epsilon_1 + (\epsilon_2 - \epsilon_1) \frac{r}{a} - 1 \right] \frac{V}{h}$$

avremo il segno  $-$  a contatto con l'armatura con carica libera positiva, il segno  $+$  a contatto con l'armatura con carica libera negativa. La densità di carica totale  $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_p + \sigma_l$  (dove  $\sigma_l$  è la densità superficiale di carica libera) è costante su tutta l'armatura e vale  $|\sigma_{\text{tot}}| = \epsilon_0 V/h$ .

d) L'energia del condensatore vale

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{2\pi\epsilon_0 a^2}{2h} \left[ \frac{\epsilon_1}{6} + \frac{\epsilon_2}{3} \right] V^2 = \frac{\pi\epsilon_0 a^2}{h} \left[ \frac{\epsilon_1}{6} + \frac{\epsilon_2}{3} \right] V^2$$

Poiché il condensatore è connesso ad un generatore per mantenere costante la differenza di potenziale, per la forza abbiamo

$$f = \frac{dU}{dh} = -\frac{\pi\epsilon_0 a^2}{h^2} \left[ \frac{\epsilon_1}{6} + \frac{\epsilon_2}{3} \right] V^2$$

dove il segno meno sta a indicare che la forza tende a diminuire  $h$ , cioè è, ovviamente, attrattiva.