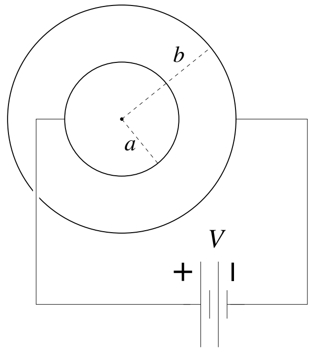
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2004-2005

Compito di Fisica b1A (12/09/2005)

1

Le armature di un condensatore sferico hanno raggi a e b, e vengono mantenute ad una differenza di potenziale costante V da una pila, come in figura.



a) Calcolare la capacità del condensatore e l'energia elettrostatica in esso racchiusa.

b) A parità di differenza di potenziale V e di raggio b dell'armatura esterna, quanto deve valere il raggio a dell'armatura interna perché su di essa il campo elettrico E sia minimo?

2

Si consideri il modello classico dell'atomo di idrogeno secondo il quale l'elettrone (carica $-e$, massa m_e) si muove di moto circolare uniforme intorno al nucleo positivo di carica $+e$. Siano ω_0 la velocità angolare e a il raggio dell'orbita.

a) Determinare la relazione tra ω_0 e a.

Si assuma d'ora in poi che il raggio a rimanga costante.
Si consideri l'atomo immerso in un campo magnetico uniforme e costante $\mathbf{B}_0$, perpendicolare al piano dell'orbita.

b) Mostrare che la frequenza del moto circolare in presenza di $\mathbf{B}_0$ diviene

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} \pm \omega_L \, ,$$

dove $\omega_L = eB_0/2m_e$ e il segno $+$ o $-$ si ottiene a seconda del verso di percorrenza dell'orbita.

D'ora in poi si può assumere che $\omega_L \ll \omega_0$, cosicchè $\omega \simeq \omega_0 \pm \omega_L$.

c) Si calcoli come è variata l'energia dell'elettrone in seguito all'introduzione del campo magnetico.

Si assuma che il campo magnetico vari dal valore nullo a $t = 0$ al valore B_0 al tempo $t = \tau$ secondo la legge $B(t) = B_0 t/\tau$.

d) Si calcoli il campo elettrico generato per induzione magnetica sull'orbita dell'elettrone e si mostri che la variazione d'energia al punto c) è dovuta al lavoro fatto dal campo elettrico tra $t = 0$ e $t = \tau$.

e) Si dica se e come cambia il punto d) se $B(t)$ varia da $B = 0$ a B_0 tra $t = 0$ e $t = \tau$ secondo una legge temporale arbitaria.

SOLUZIONI

1

a) Sia Q la carica sull'armatura interna. Poiché il problema ha simmetria sferica la carica Q sarà distribuita uniformemente e il campo elettrico sarà radiale e dipendente solo da r. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica concentrica al condensatore ed avente raggio r si ha subito

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}\,, \qquad E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,.$$

La differenza di potenziale tra le armature è data dall'integrale di linea

$$V = -\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)\,.$$

La capacità vale quindi

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a}\,,$$

e l'energia elettrostatica $U_{es} = CV^2/2$.

b) La densità superficiale di carica σ_a sull'armatura interna ed il valore E_a del campo elettrico sulla stessa armatura sono dati da

$$\sigma_a = \frac{Q}{4\pi a^2} = \frac{\varepsilon_0 V b}{a(b-a)}\,, \qquad E_a = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_0} = \frac{Vb}{a(b-a)}\,.$$

Il valore minimo di E_a si trova ponendone uguale a zero la derivata rispetto ad a

$$\frac{\partial E_a}{\partial a} = \frac{Vb(b-2a)}{a^2(b-a)^2}$$

Quindi il valore minimo di E_a di ha per $a = b/2$.

2

a) Lungo l'orbita la forza di attrazione coulombiana del nucleo deve essere bilanciata dalla forza centrifuga:

$$-k_0\frac{e^2}{a^2} + m_e\omega_0^2 a = 0\,,$$

dove $k_0 = 1/4\pi\epsilon_0$. Si ottiene

$$\omega_0^2 = \frac{k_0 e^2}{m_e a^3}\,.$$

b) Aggiungendo il campo magnetico B_0, compare la forza magnetica $-e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ che è radiale e vale $\pm vB_0\hat{\mathbf{r}} = \pm a\omega B_0\hat{\mathbf{r}}$ a seconda del verso di percorrenza dell'orbita: se $\mathbf{B}_0$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli si ha il segno meno, se sono antiparalleli il segno più. L'equilibrio delle forze ora è dato da

$$-k_0\frac{e^2}{a^2} \pm a\omega B_0 + m_e\omega^2 a = 0\,,$$

da cui si ottiene

$$\omega^2 \pm \frac{eB_0}{m_e}\omega = \frac{k_0 e^2}{m_e a^3} = \omega_0^2\,,$$

ovvero, posto $\omega_L = eB_0/2m_e$,

$$\omega^2 \pm 2\omega_L\omega - \omega_0^2 = 0\,,$$

che ha la soluzione cercata

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_L^2} \pm \omega_L\,.$$

L'altra soluzione dell'equazione di secondo grado è stata scartata perchè se $B_0 = 0$ fornirebbe $\omega = -\omega_0$, che non ha significato.

c) L'energia totale dell'elettrone è data dalla somma di energia cinetica e potenziale

$$U = \frac{m_e}{2}v^2 - k_0\frac{e^2}{a} = \frac{m_e}{2}(a\omega)^2 - k_0\frac{e^2}{a}\,.$$

Poichè a non varia, la differenza di energia è dovuta interamente alla variazione di energia cinetica:

$$\Delta U = \frac{m_e}{2}a^2(\omega^2 - \omega_0^2) \simeq \pm m_e a^2\omega_0\omega_L\,.$$

Notare che poichè si può anche scrivere per l'energia in assenza di campo magnetico $U_0 = -m_e a^2\omega_0^2/2$, si ha

$$\Delta U \simeq \pm 2\frac{\omega_L}{\omega_0}U_0\,.$$

d) Assumendo una simmetria cilidrica rispetto all'asse passante per il centro dell'orbita, il campo elettrico ha solo la componente azimutale e si ha per la sua circuitazione lungo l'orbita

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = 2\pi a E = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\pi a^2\frac{dB_0}{dt}\,,$$

da cui si ottiene

$$E = -\frac{a}{2\tau}B_0\,.$$

Si ha quindi un'accelerazione tangenziale costante. La velocità tangenziale varia secondo la legge

$$v(t) = v_0 \pm \frac{eE}{m_e}t = v_0 \mp \frac{ea}{2m_e}B_0\frac{t}{\tau} = a\omega_L\frac{t}{\tau}\,,$$

a seconda del segno dell'orbita, in quanto la forza elettrica risulta antiparallela o parallela alla velocità iniziale. Al tempo $t = \tau$ la variazione di energia cinetica è quindi

$$\frac{m_e}{2}[(v_0 \mp a\omega_L)^2 - v_0^2] = \frac{m_e}{2}(\mp 2v_0 a\omega_L + a^2\omega_L^2) \simeq \mp 2\frac{m_e}{2}v_0^2\frac{\omega_L}{\omega_0} = \pm 2\frac{\omega_L}{\omega_0}U_0\,, \tag{1}$$

dove si è usato $v_0 = a\omega_0$ e $U_0 = -m_e v_0^2/2$, e si sono trascurati termini di ordine $(\omega_L/\omega_0)^2$.

e) Procedendo come al punto d) si può scrivere $E = -(a/2)dB_0/dt$ e

$$v(t) = v_0 \pm \int_0^t \frac{eE}{m_e}dt' = v_0 \mp \frac{ea}{2m_e}\int_0^t \frac{dB_0(t')}{dt}dt' = v_0 \mp \frac{ea}{2m_e}B_0(t)\,, \tag{2}$$

ovvero lo stesso risultato finale. Occorre, comunque, assumere che l'accensione di B_0 sia sufficientemente lenta per poter trascurare la corrente di spostamento $\epsilon_0\partial_t\mathbf{E}$ che potrebbe modificare il valore di B.