



## 2. Light Sail: il problema dello specchio (relativistico) in moto

### Relatore:

Andrea Macchi  
(CNR/INO, Pisa)

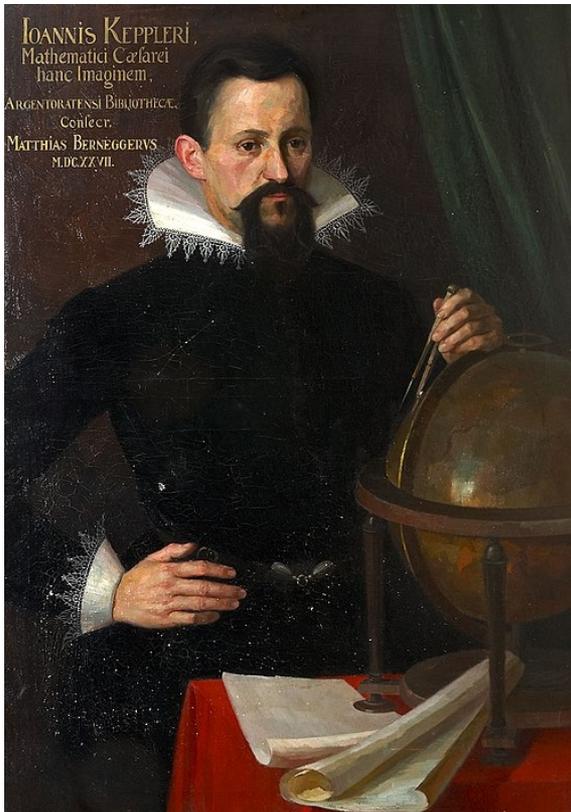
### Evento:

Corso di formazione -  
Fondazione

"I Lincei per la Scuola"  
Scuola Normale Superiore,  
Pisa, 20 Marzo 2024

## C'è vento nel cosmo?

**Keplero** (~1600): la coda delle comete è **opposta** alla posizione del Sole. La **luce solare** agisce come un **vento**?



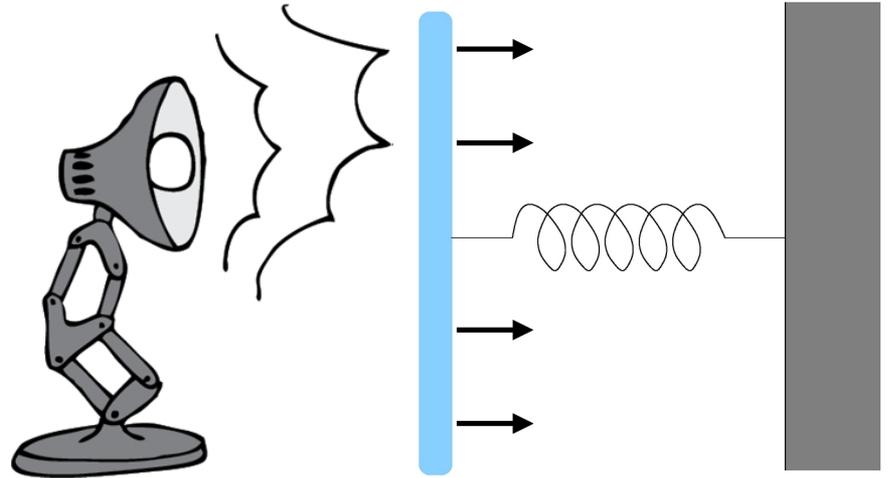
### **Keplero** a **Galileo**:

*“Non è improbabile che ci siano abitanti non solo sulla Luna ma anche su Giove [...] Appena qualcuno scoprirà l'arte di volare, non mancheranno i coloni dalla nostra specie umana [...] Trovate navi e vele adatte ai venti celesti, e qualche intrepido sfiderà quel vuoto ...”*

(“Dissertatio cum Nuncio Sidereo”, 1610)

# La Pressione della Luce in una Formula

Forza per unità di superficie esercitata a incidenza perpendicolare su uno specchio perfettamente riflettente:



$$P = 2I / c$$

$I$  : intensità della luce

(energia luminosa per unità di tempo e superficie)

$c$  : velocità della luce (~300000 km/s)

# Derivazioni della Formula (Lezione 1)

- 1 - termodinamica
- 2 - corpuscolare
- 3 - elettromagnetico

## Riferimenti:

- (1) A. Bartoli, "Il Calorico Raggiante e il Secondo Principio di Termodinamica", *Il Nuovo Cimento* **15** (1884) 193
- (1) B. Carazza, H. Bragh, "Adolfo Bartoli and the Problem of Radiant Heat", *Annals of Science* **46** (1989) 183-194
- (2) E. Amaldi, G. Amaldi, U. Amaldi, *La Fisica per i Licei Scientifici* (Zanichelli, 1983), vol. I
- (2,3) R. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics*, vol. I, 34-8 & 39

# Rassegna degli Sviluppi Storici (e altro)

Roberto Renzetti, “La Pressione della Luce”,  
*Fisicamente* (blog), 19/06/2020

<https://fisicamente.blog/2020/06/19/la-pressione-della-luce/>

Fisicamente

DI ROBERTO RENZETTI



HOME

ARTICOLI

CHI SONO

CONTATTI

DOCUMENTI

PRIVACY POLICY

[HOME](#) > [FISICA](#) > LA PRESSIONE DELLA LUCE

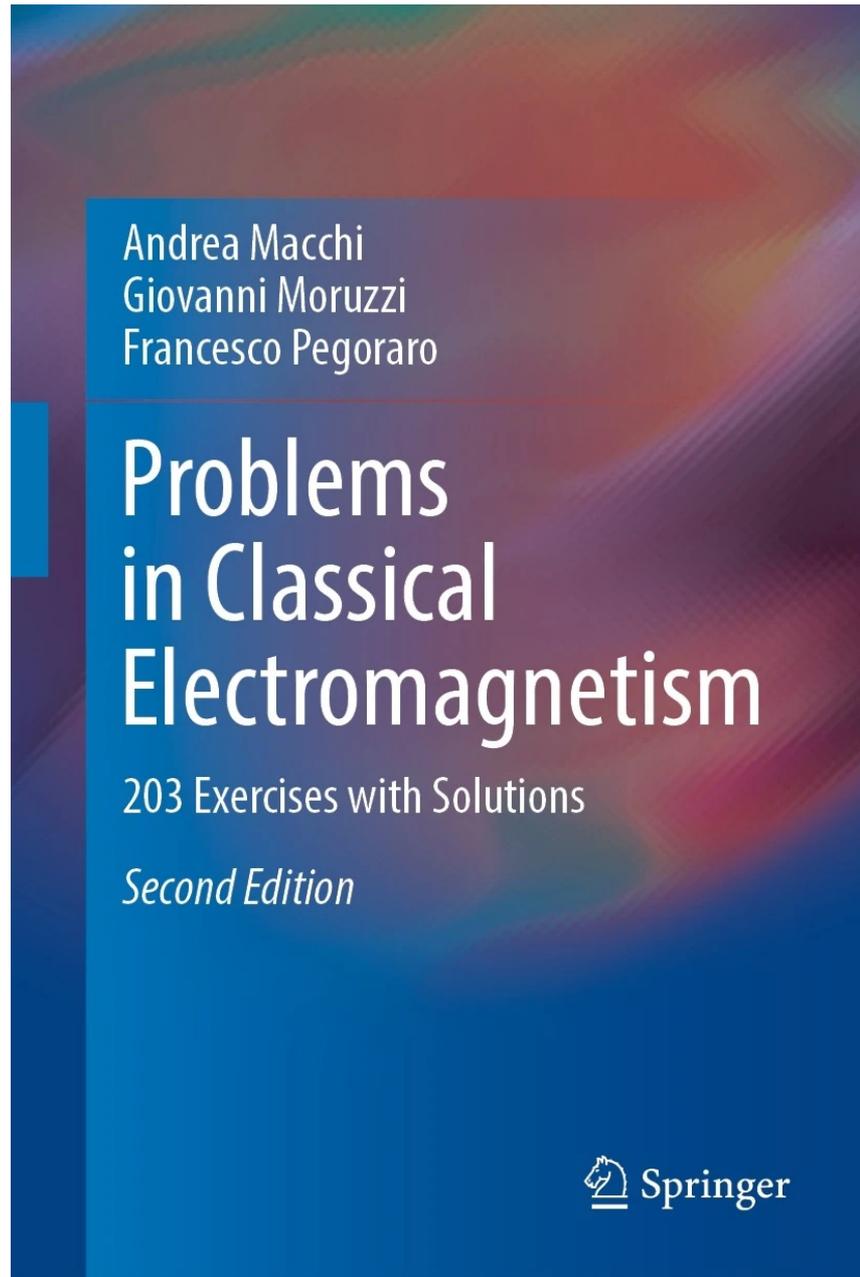
## La pressione della luce

BY [ROBERTORENZETTI44](#) on 19 GIUGNO 2020 • ( 0 )

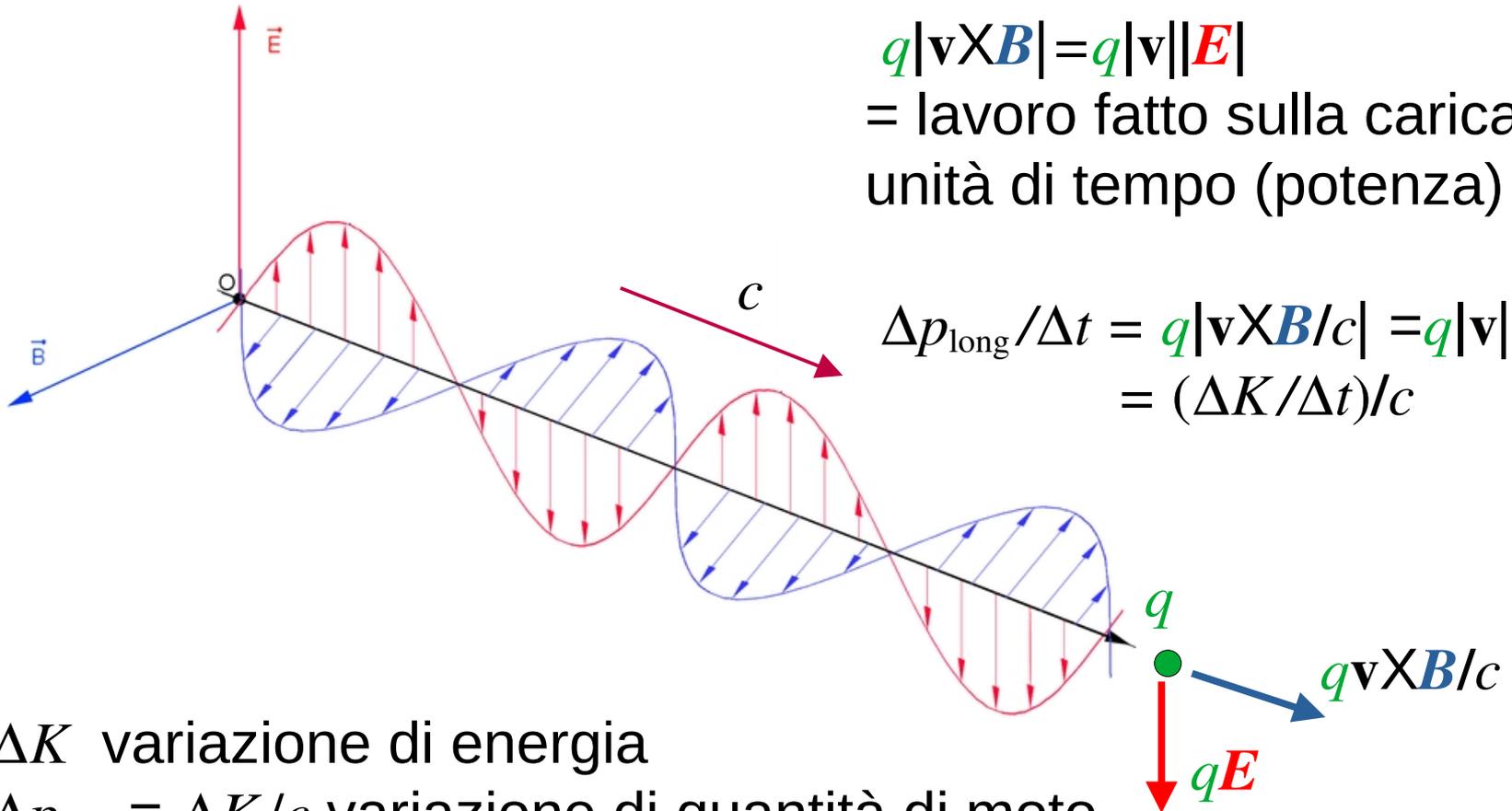
### ABSTRACT

The idea that light produces pressure evolved through a series of adoptions and rejections, from the hypothesis of Newton to the experiment of Lebedev, depending on the theory used to describe the nature of light. This article reviews the history of this development.

Per Alcuni Esempi ...



# Quantità di Moto in un'Onda Elettromagnetica



$q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = q|\mathbf{v}||\mathbf{E}|$   
 = lavoro fatto sulla carica per  
 unità di tempo (potenza)

$$\Delta p_{\text{long}} / \Delta t = q|\mathbf{v} \times \mathbf{B} / c| = q|\mathbf{v}||\mathbf{E}| / c = (\Delta K / \Delta t) / c$$

$\Delta K$  variazione di energia

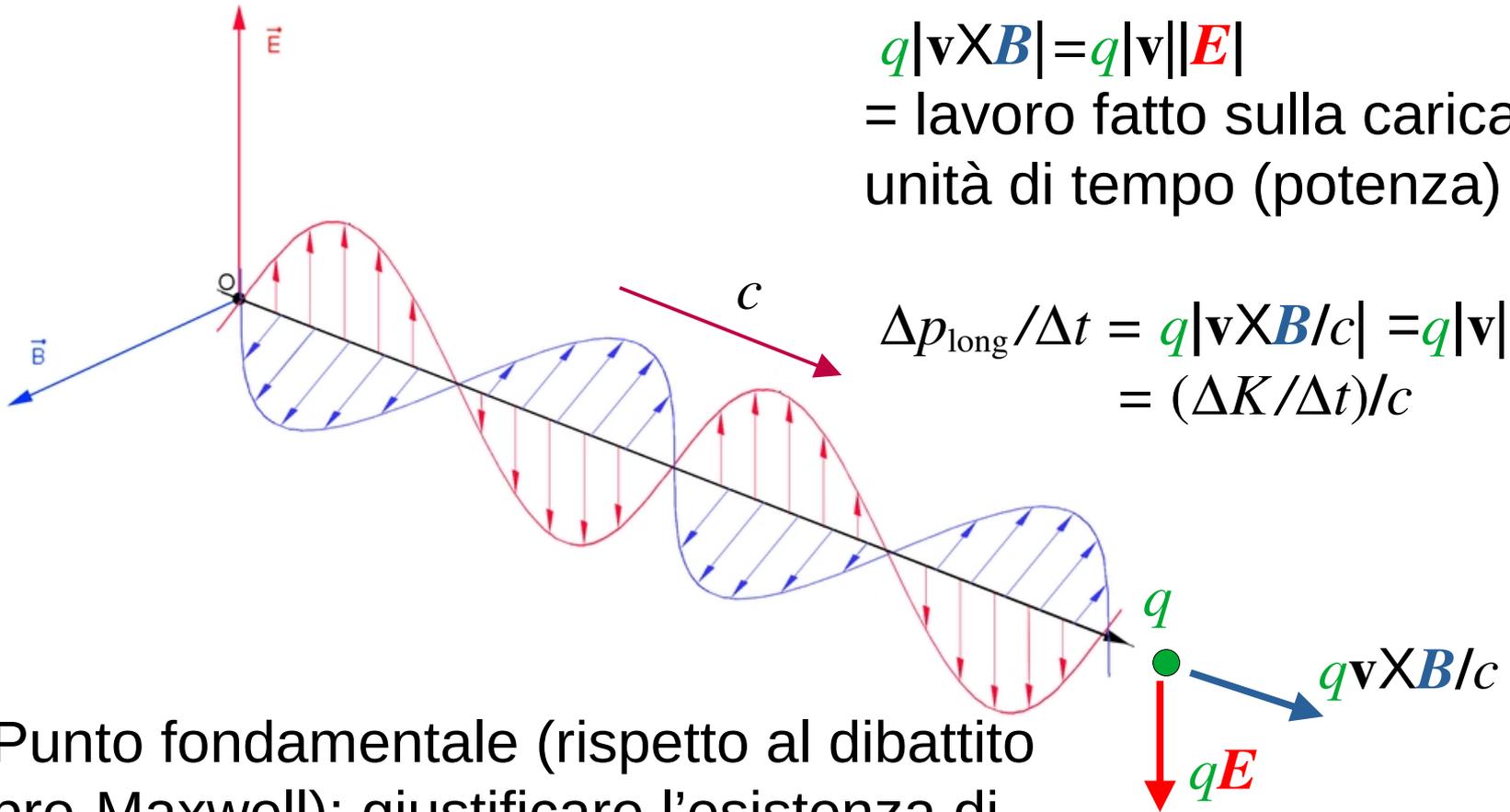
$\Delta p_{\text{long}} = \Delta K / c$  variazione di quantità di moto

Energia e q.d.m. sono cedute dall'onda EM

→ per il campo EM  $\mathbf{g} = \Delta p_{\text{long}} / \Delta V = u \mathbf{c}$  ,  $\mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{B} / (4 \pi c)$

( $\mathbf{g}$  ,  $u$ : densità di en. & q.d.m.)

# Quantità di Moto in un'Onda Elettromagnetica

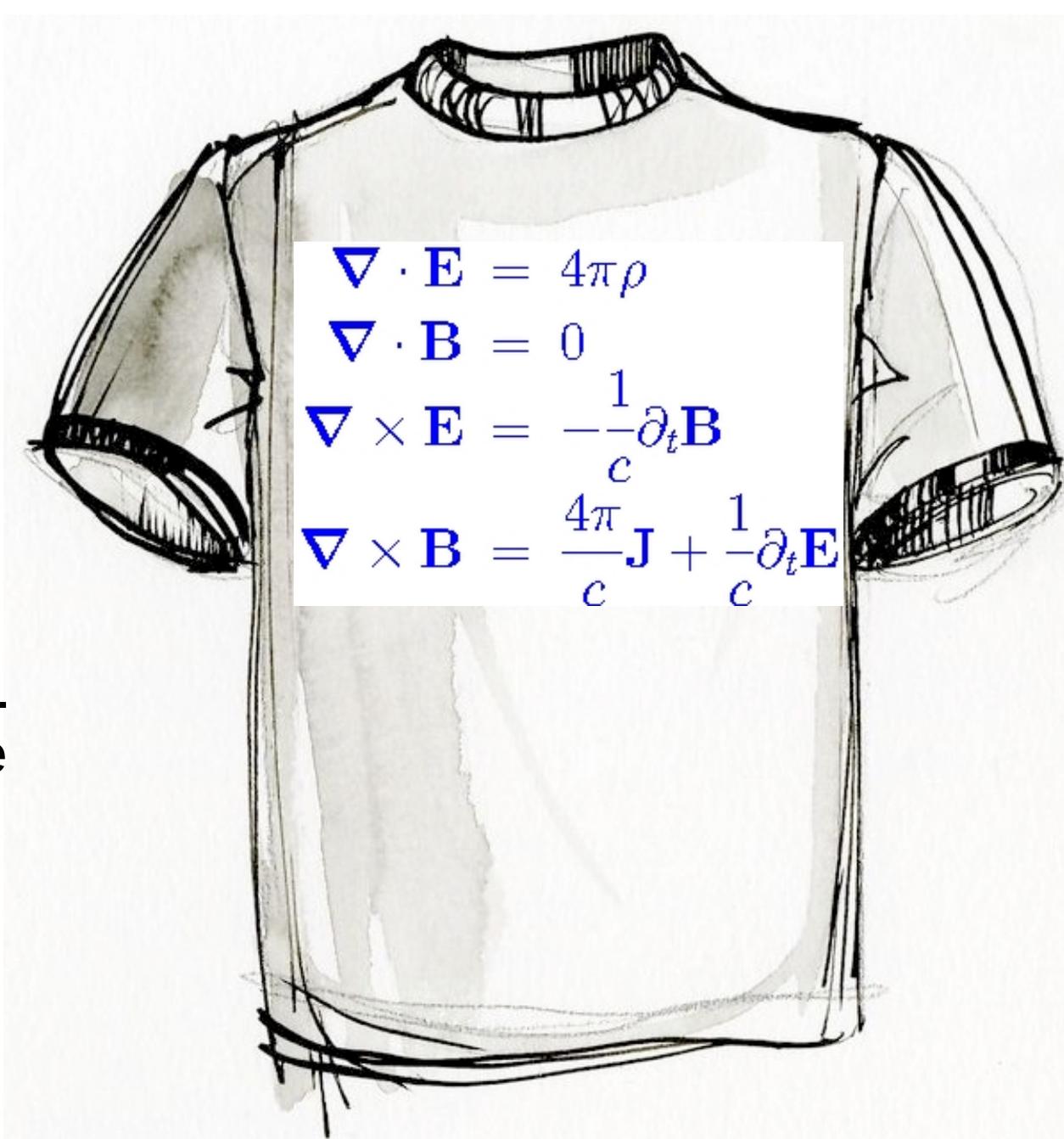


$q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}| = q|\mathbf{v}||\mathbf{E}|$   
= lavoro fatto sulla carica per  
unità di tempo (potenza)

$$\Delta p_{\text{long}}/\Delta t = q|\mathbf{v} \times \mathbf{B}/c| = q|\mathbf{v}||\mathbf{E}|/c \\ = (\Delta K/\Delta t)/c$$

Punto fondamentale (rispetto al dibattito pre-Maxwell): giustificare l'esistenza di una forza *longitudinale* esercitata da onde *trasversali* (secondo la teoria ondulatoria di **A. J. Fresnel**)

(aperta parentesi su Equazioni di Maxwell,  
dimensioni e unità di misura, ...



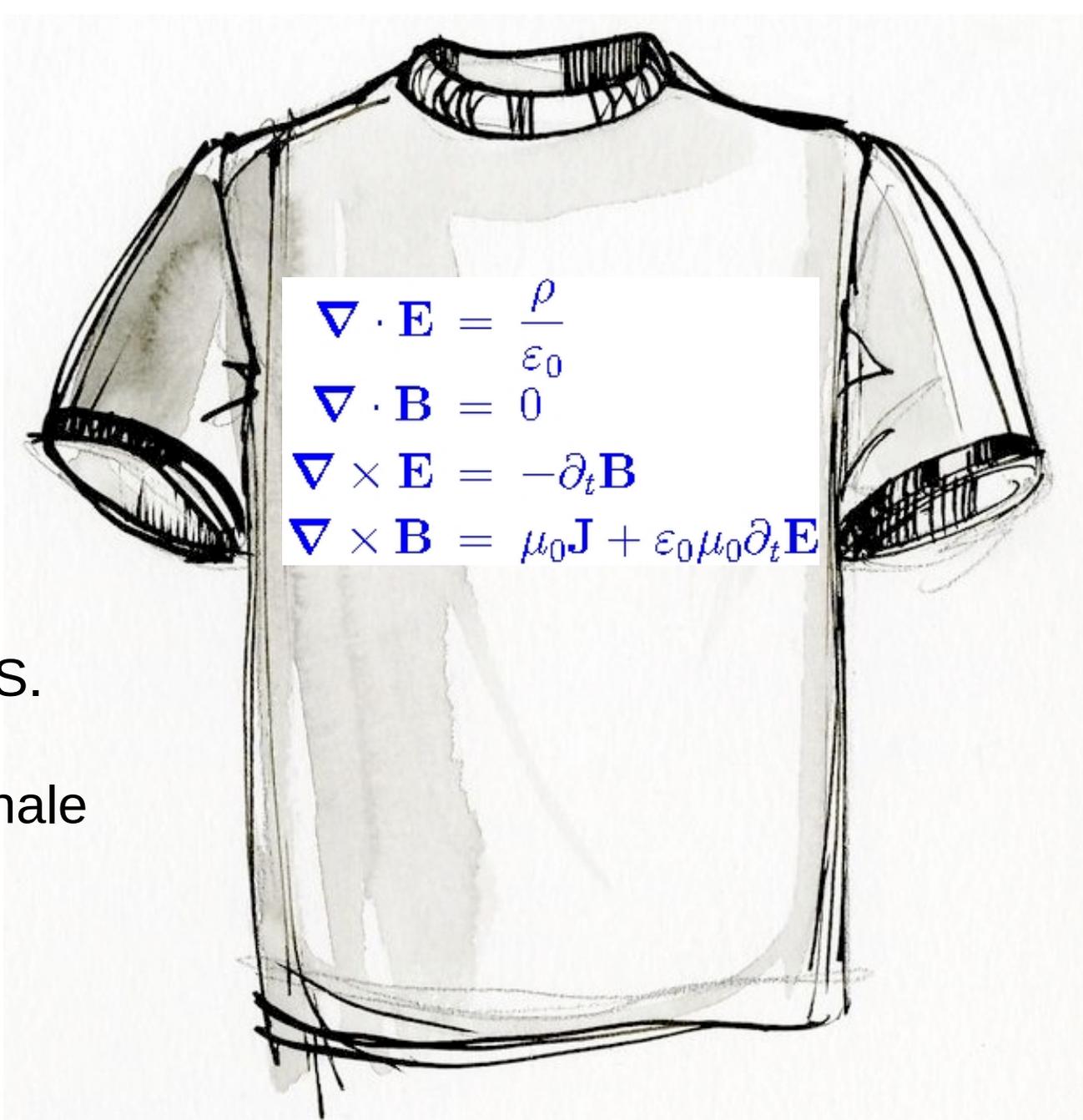
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{B}$$

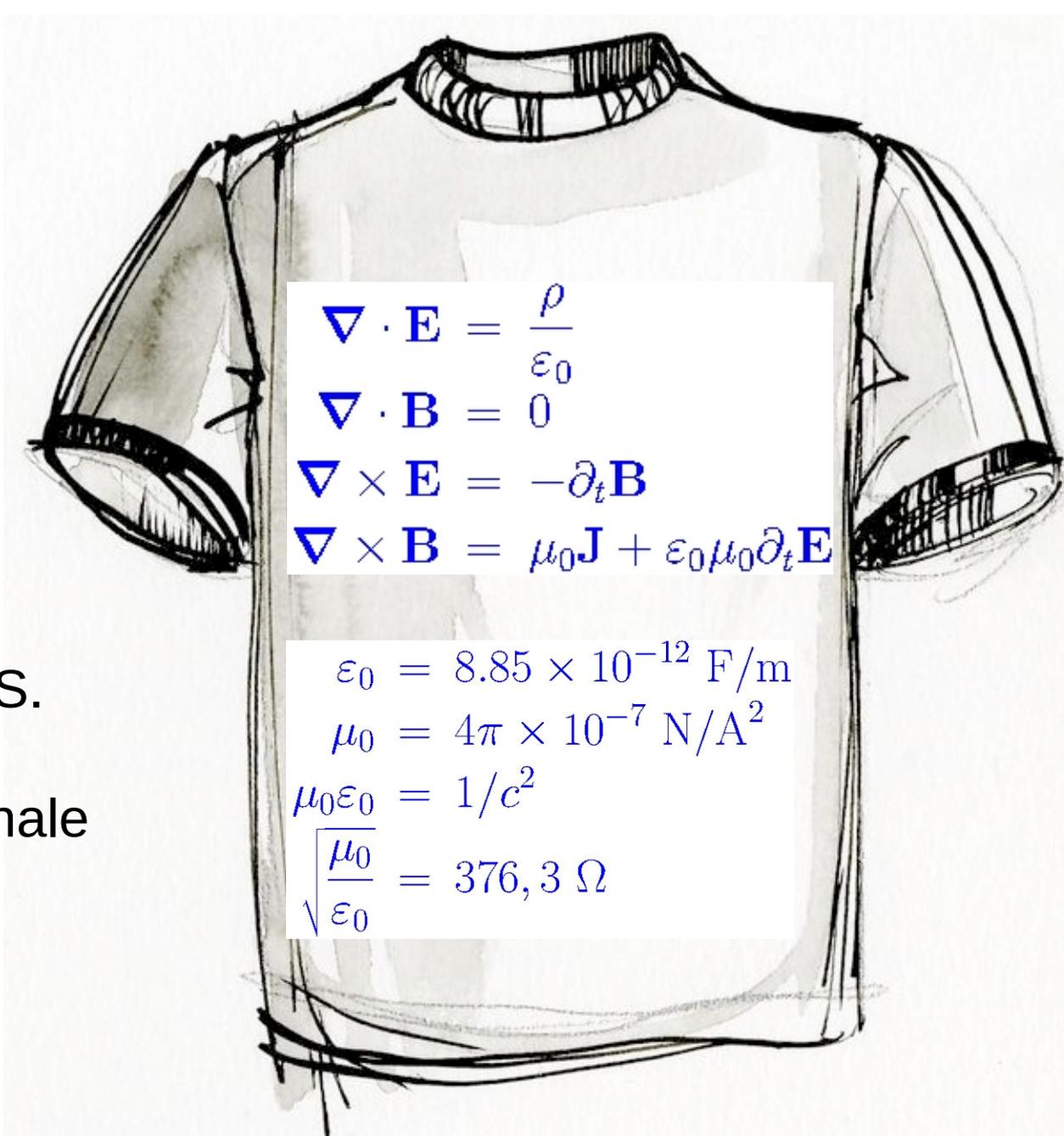
$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\partial_t\mathbf{E}$$

unità c.g.s.  
Gaussiane



$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}\end{aligned}$$

unità M.K.S.  
Sistema  
Internazionale  
(SI)



$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\partial_t \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} \\ \mu_0 &= 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \\ \mu_0 \epsilon_0 &= 1/c^2 \\ \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} &= 376,3 \text{ } \Omega\end{aligned}$$

unità M.K.S.  
Sistema  
Internazionale  
(SI)

unità c.g.s.  
Gauss

$$F = \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

Legge di Coulomb

unità di carica:

$$1 \text{ statC} = 1 \text{ Fr} = \sqrt{(\text{g} \cdot \text{cm}^3 / \text{s}^2)}$$

$$[E] = [B]$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} / c) \quad \text{Forza di Lorentz (cgs)}$$

unità M.K.S.C.  
Sistema  
Internazionale  
(SI)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

Legge di Coulomb

unità di carica: 1 C

$$[E] = [B] \times ([L] / [T])$$

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Forza di Lorentz (SI)

... chiusa parentesi su Equazioni di Maxwell,  
dimensioni e unità di misura)

# Radiometro di Crookes (1870)



detto anche  
“mulino a luce”  
(*optical windmill*)

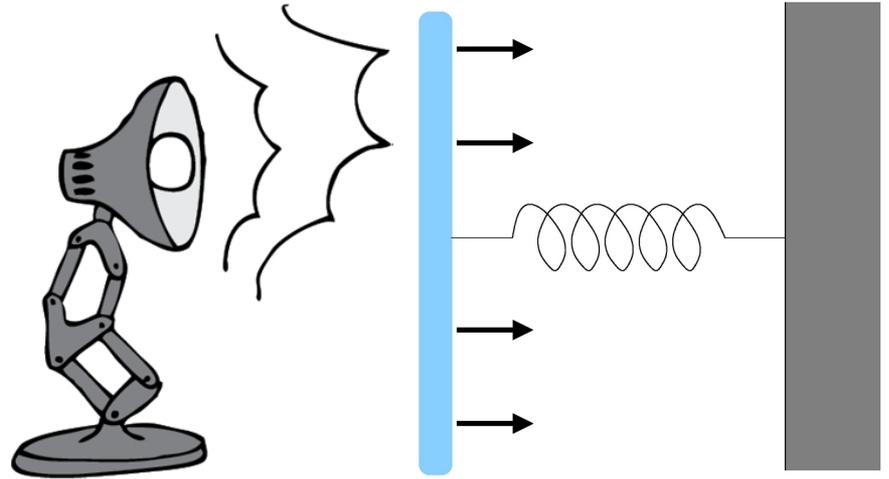
Una prova della  
pressione della luce?

(*Spoiler: no*)

<https://youtu.be/Fkbf137nwYA>

# La Pressione della Luce in una Formula

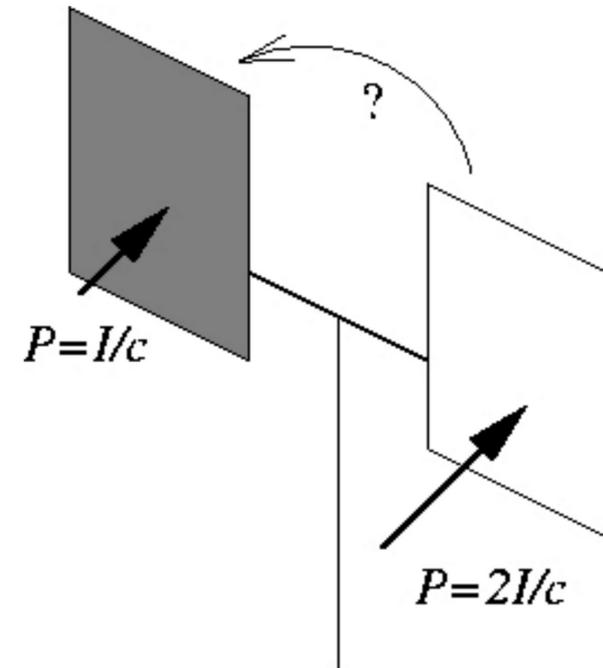
Forza per unità di superficie esercitata a incidenza perpendicolare su uno specchio con riflettività  $R < 1$



$$P = (1+R)I / c$$

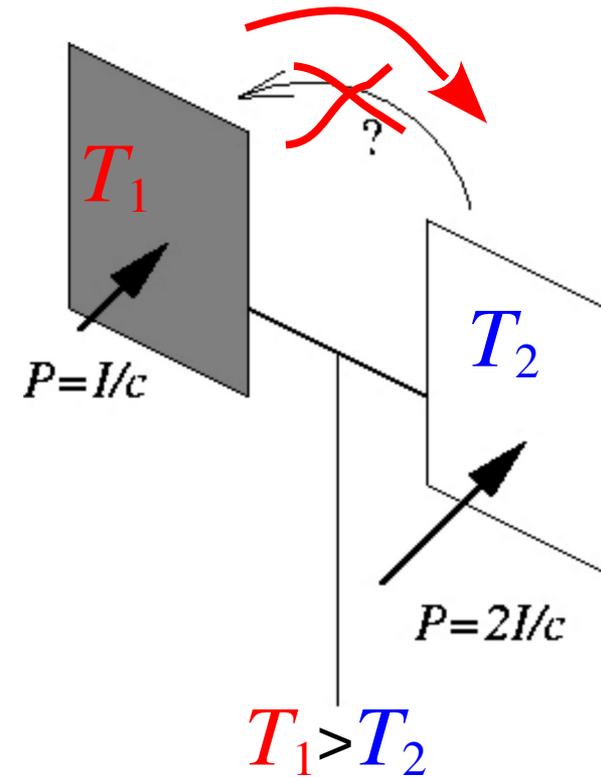
# Pressione e Verso di Girazione

La pressione della luce sulla superficie bianca (totalmente riflettente,  $R=1$ ) è il doppio della pressione sulla superficie nera (totalmente assorbente,  $R=0$ ) e quindi il mulino in figura dovrebbe girare in senso antiorario ...  
... in realtà gira in senso *inverso*!



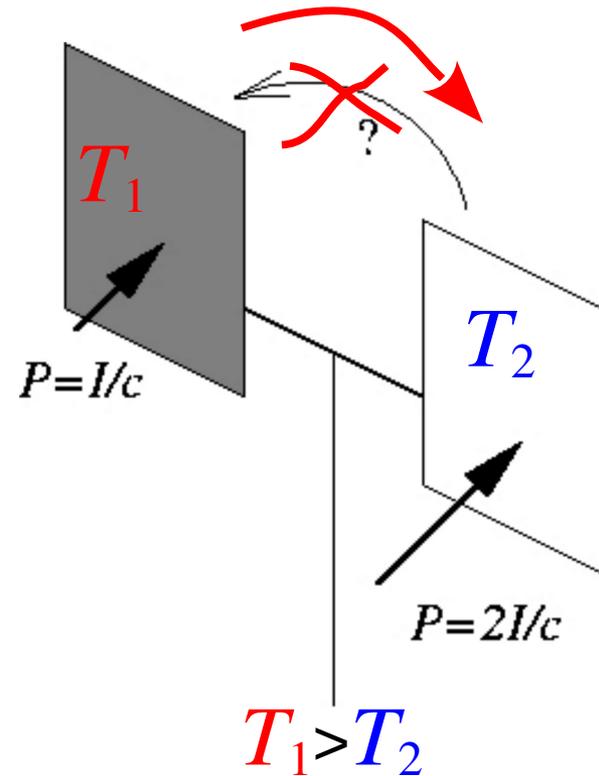
# Pressione e Verso di Girazione

La superficie nera assorbe maggiore radiazione e diventa più calda della superficie bianca. La differenza locale di pressione del gas nel bulbo causa la rotazione nel verso opposto a quello previsto dalla pressione della luce che risulta troppo debole.



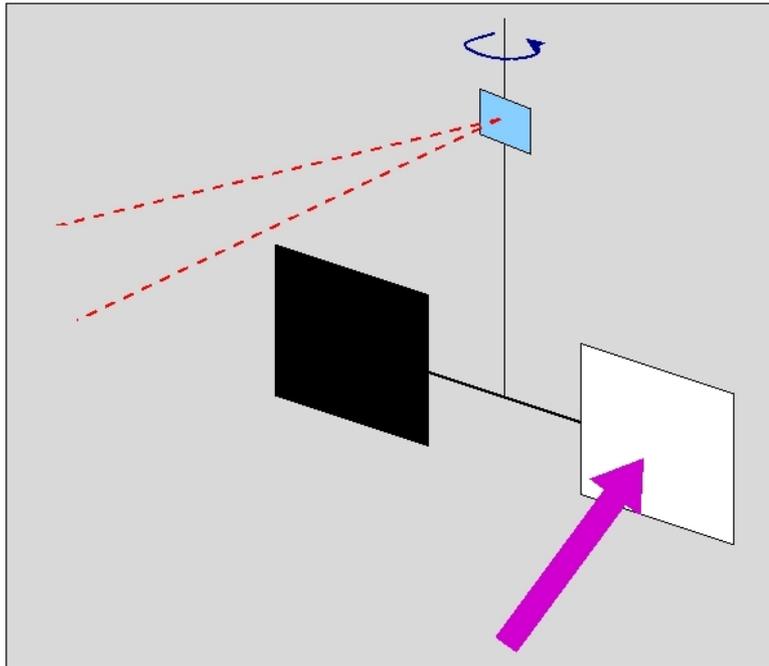
# Pressione e Verso di Girazione

*Dimostrazione:*  
sospendendo l'intero radiometro a un filo questo ruota in direzione opposta a quella delle palette dimostrando che la reazione dinamica è sulle molecole di gas e non sulla radiazione (A. J. Fresnel, 1876)



(MA raffreddando poi rapidamente l'apparato (e.g. mettendolo in freezer!) in assenza della sorgente di luce, il più rapido raffreddamento radiativo dà una temporanea girazione nel senso previsto dalla pressione di radiazione termica!)

# Verifica Sperimentale



**Piotr N. Lebedev**, 1899  
(metodo del pendolo  
di torsione)

Sorgente: luce da  
lampada ad arco,  
focalizzata su lamina  
metallica posta in alto  
vuoto

## A Vela nello Spazio?

"... un giorno avremo velocità molto più grandi ... delle quali **la luce** sarà l'agente meccanico ... e viaggeremo verso la Luna, i pianeti, e **le stelle**"

**Jules Verne**, *Dalla Terra alla Luna* (1865)

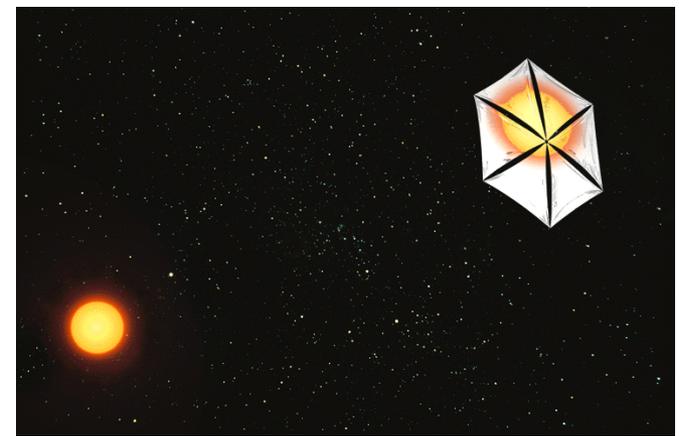
I viaggi spaziali sono limitati dal peso del **motore** e del **carburante** necessari



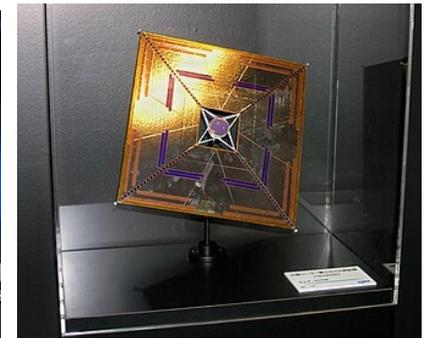
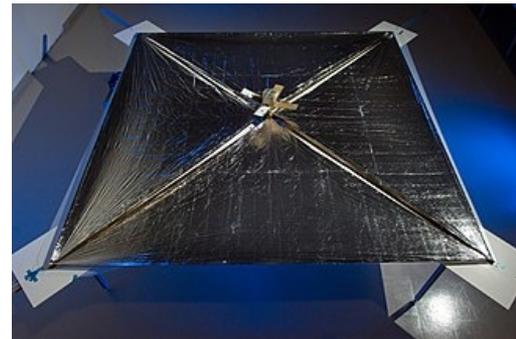
# A Vela nello Spazio?

Progetti in corso di vele solari:  
IKAROS (Giappone),  
NanoSAIL-D, CubeSail (USA),  
LightSail 1 & 2 (The Planetary  
Society), ...

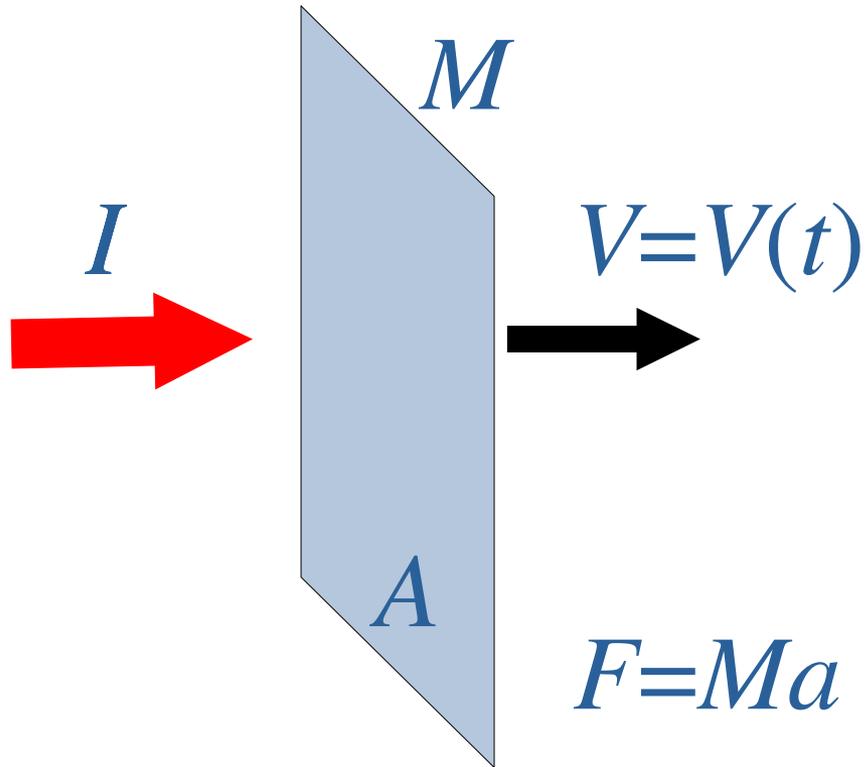
Immagini da Wikipedia:  
[en.wikipedia.org/wiki/Solar\\_sail](https://en.wikipedia.org/wiki/Solar_sail)  
[en.wikipedia.org/wiki/LightSail](https://en.wikipedia.org/wiki/LightSail)



Andrzej Mirecki .Wikimedia commons, IKAROS\_solar\_sail.jpg



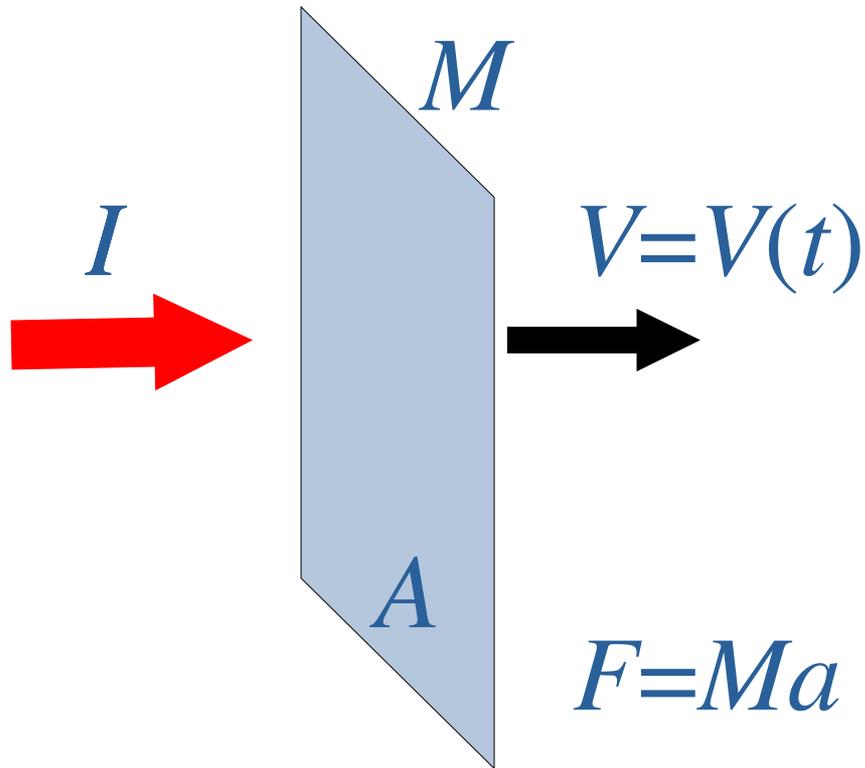
## Light Sail: lo Specchio in Moto



$$F = \frac{2I}{c}A$$
$$a = \frac{c}{dt} \frac{dV}{dt} = \frac{F}{M} = \frac{2I}{(M/A)c}$$

Vela "leggera": piccola  $M/A$   
(densità superficiale, i.e. Kg/m<sup>2</sup>)

## Light Sail: lo Specchio in Moto



$$F = \frac{2I}{c}A$$
$$a = \frac{c}{dt} = \frac{F}{M} = \frac{2I}{(M/A)c}$$

Vela "leggera": piccola  $M/A$   
(densità superficiale, i.e. Kg/m<sup>2</sup>)

*Esempio:* foglio di Alluminio (densità  $\rho = 2700 \text{ Kg/m}^3$ ) con spessore  $d=10$  micron :  $M/A = \rho d = 0,027 \text{ Kg/m}^2$

Con  $I = I_T \approx 1 \text{ kWatt/m}^2$  (luce solare sulla Terra),

$$a \approx 5 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2 \approx 5 \times 10^{-5} g$$

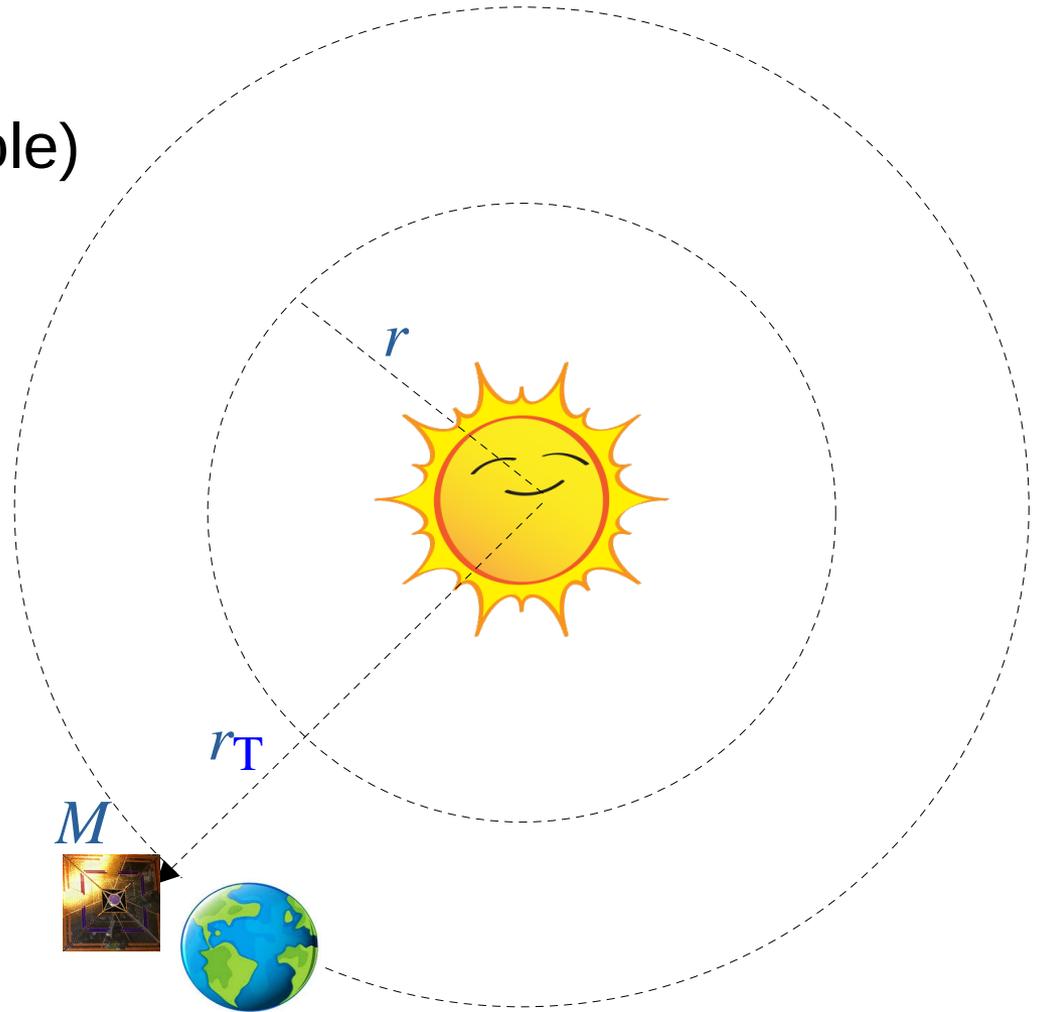
# Velocità di una Vela Solare

Vela in partenza dall'orbita terrestre (distanza  $r_T$  dal Sole)

Potenza totale del Sole (indipendente da  $r$ )!

$$\begin{aligned} P_{\odot} &= I_{\odot}(r) \times \pi r^2 \\ &= I_{\odot}(r_T) \times \pi r_T^2 \end{aligned}$$

$$I_{\odot}(r) = I_T \frac{r_T^2}{r^2} \quad I_T = I_{\odot}(r_T)$$



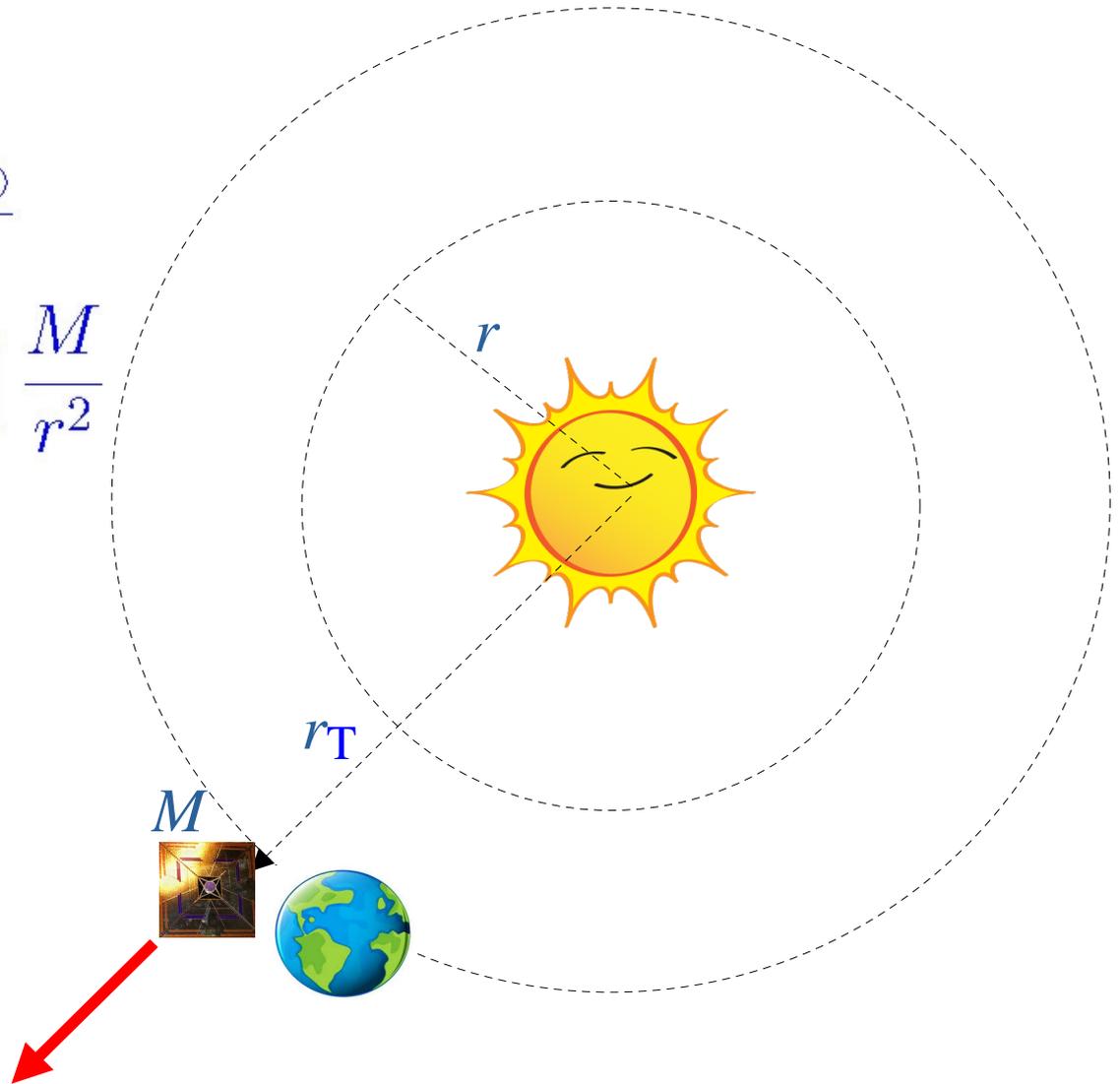
# Velocità di una Vela Solare

Forza totale sulla vela

$$F = \frac{2I(r)}{c}A - G\frac{MM_{\odot}}{r^2}$$
$$= \left( \frac{2I_{\text{T}}r_{\text{T}}^2A}{Mc} - GM_{\odot} \right) \frac{M}{r^2}$$

La vela sfugge dalla gravità solare se

$$\frac{M}{A} < \frac{2I_{\text{T}}r_{\text{T}}^2}{GM_{\odot}c}$$



# Velocità di una Vela Solare

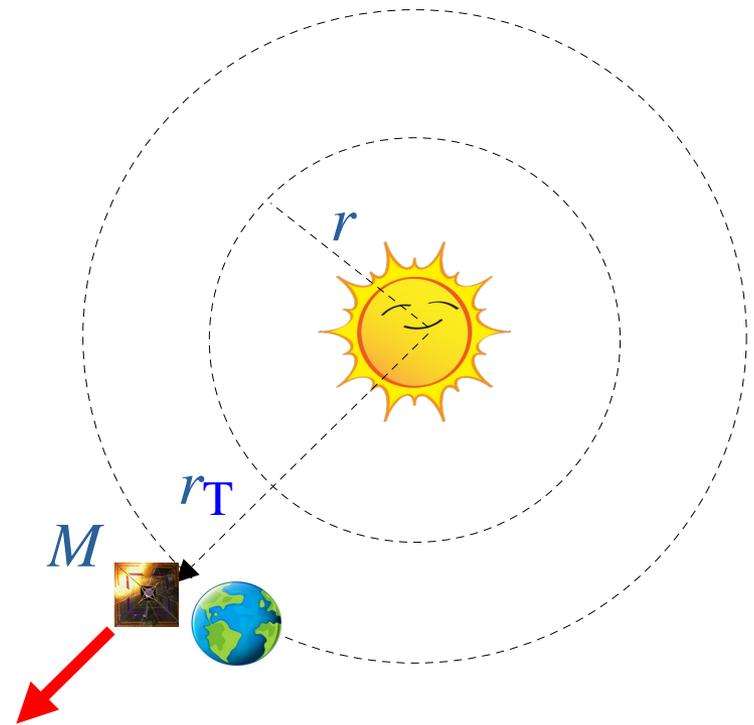
Velocità finale  $v_f$

( $a_T$  : accelerazione iniziale)

$$F \equiv M a_T \frac{r_T^2}{r^2}$$
$$\frac{M v_f^2}{2} = \int_{r_T}^{+\infty} F dr$$

$$= M a_T r_T^2 \int_{r_T}^{+\infty} \frac{dr}{r^2} = M a_T r_T$$

$$v_f = \sqrt{2 a_T r_T} \quad a_T \equiv \frac{2 I_T A}{c M} - G \frac{M_\odot}{r_T^2}$$



# Velocità di una Vela Solare

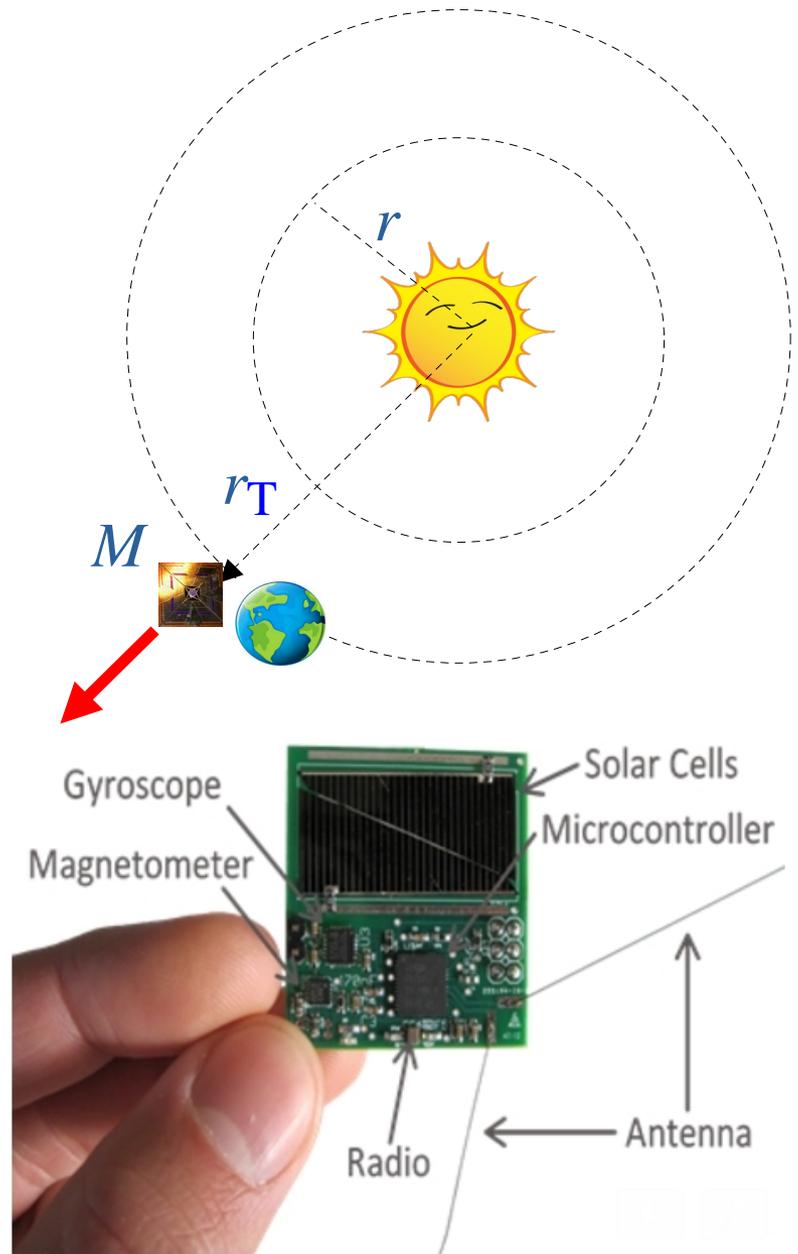
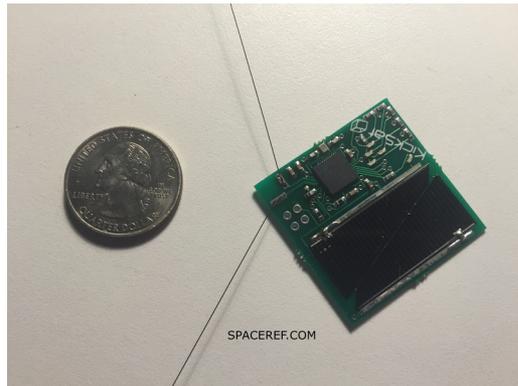
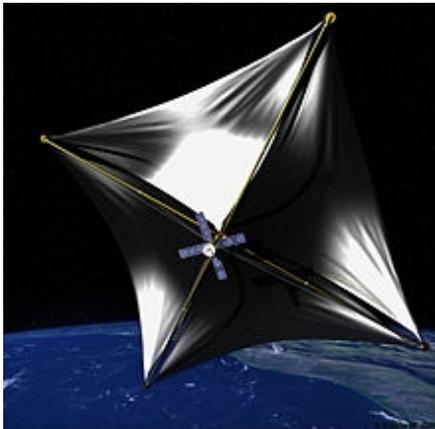
Grafene:  $M/A = 7.6 \times 10^{-7} \text{ Kg/m}^2$

$v_f = 4.8 \times 10^{-3} c = 1.4 \times 10^6 \text{ m/s}$   
 $\approx 10^5$  la velocità del Voyager

Progetto di vela-sonda con  
strumentazione "on chip":

$M \approx 10 \text{ g}$  ,  $A \approx 16 \text{ m}^2$

$M/A \approx 6 \times 10^{-4} \text{ Kg/m}^2$



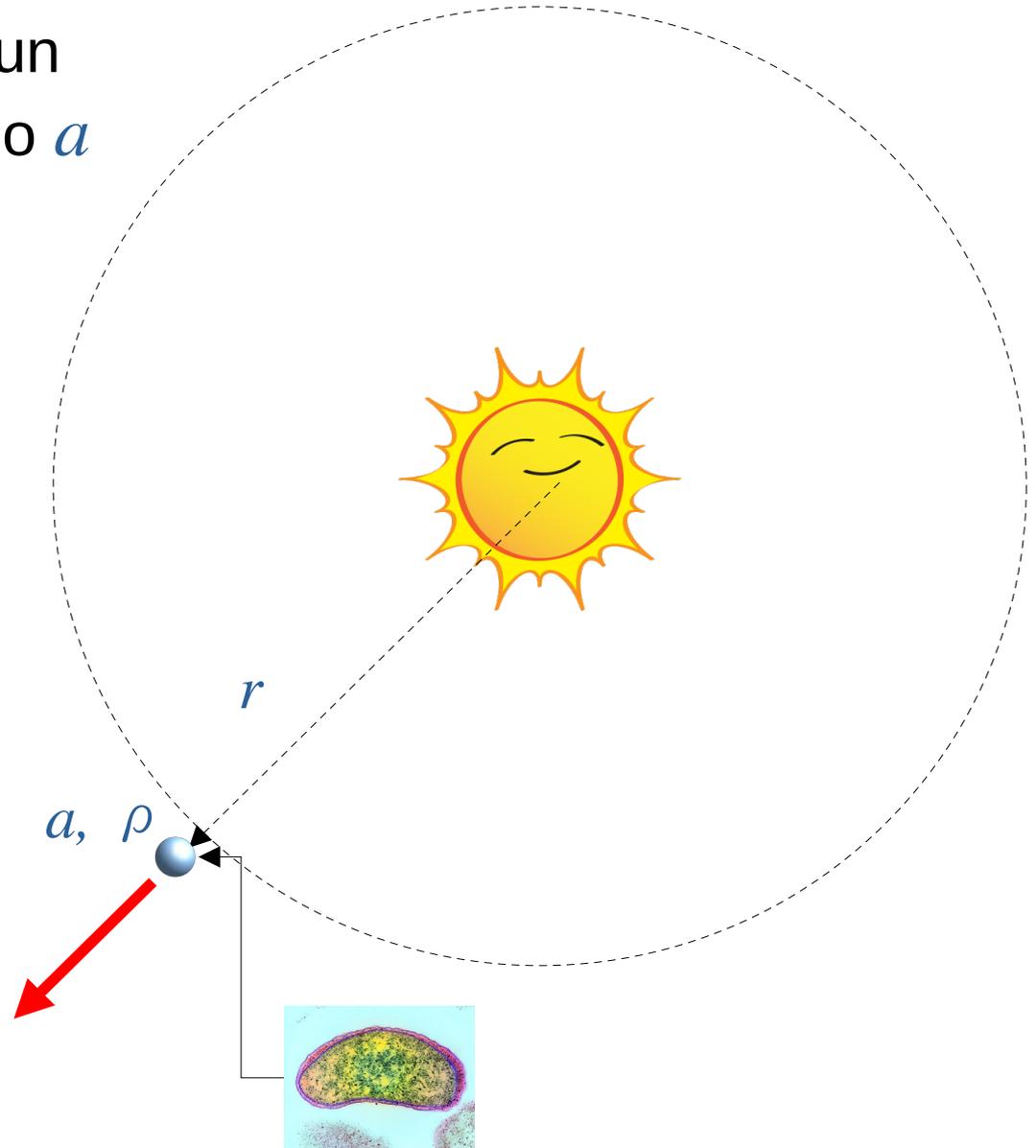
# Effetto "Scopa" su Polvere Spaziale

Stessa analisi applicata a un  
granello di polvere di raggio  $a$   
e densità  $\rho \approx 10^3 \text{ Kg/m}^3$

$$a < \frac{3I_{\text{T}}r_{\text{T}}^2}{4\rho GM_{\odot}c}$$

$$\approx 6.7 \times 10^{-7} \text{ m}$$

Idea della  
(radio-)panspermia  
(**S. Arrhenius**, 1908):  
Trasporto interstellare di  
spore batteriche grazie  
alla pressione della  
radiazione stellare



# Viaggi interstellari?

Alla velocità del **Voyager**  
(uscito dal sistema solare  
nel 2013) raggiungeremmo

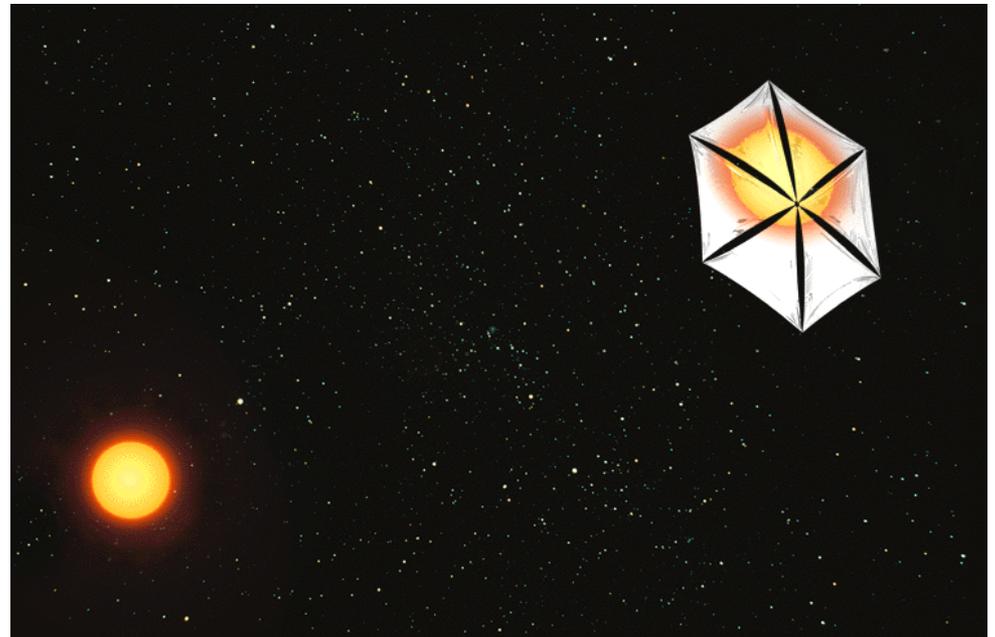
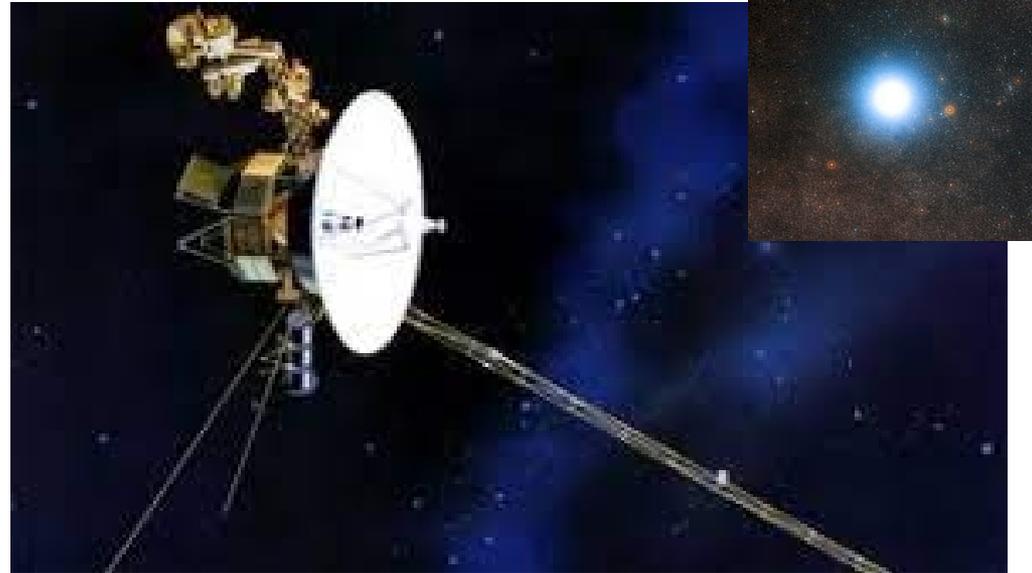
**Alpha Centauri**

(~4 anni luce di distanza)

in **74000 anni**

Una vela di **10 grammi**  
spinta dalla luce del Sole  
può farcela in ~ **100 anni**  
frenando in arrivo con la  
luce di Alpha Centauri

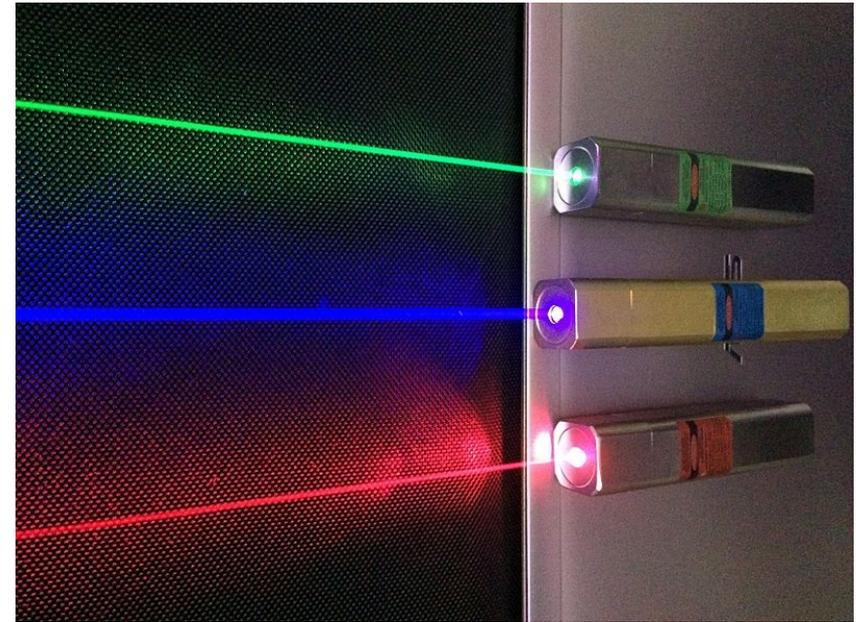
[R. Heller & M. Hippke,  
The Astrophysical Journal  
Letters **835** (2017) L32]



# Propulsione Laser?

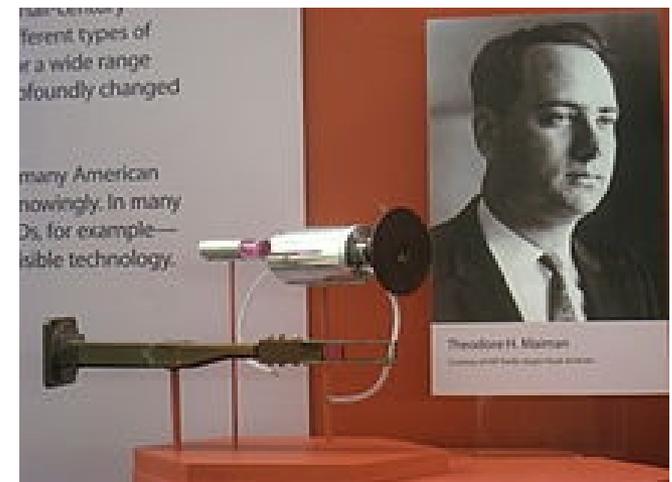
## LASER:

luce artificiale coerente,  
monocromatica,  
direzionale,  
amplificabile,  
“concentrabile”  
nello spazio e nel tempo



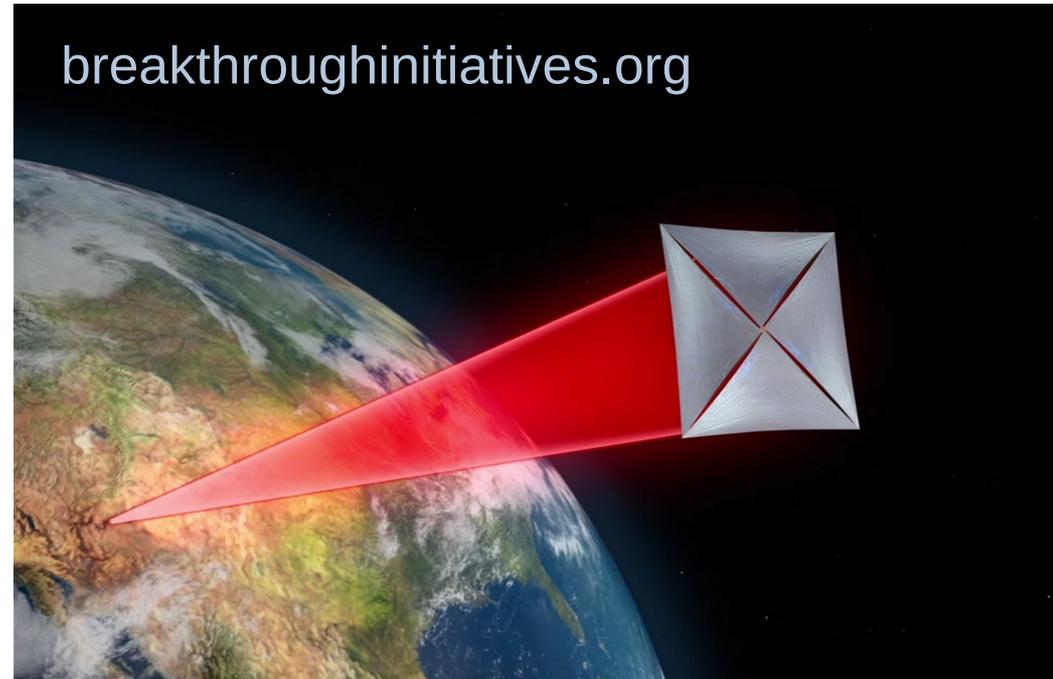
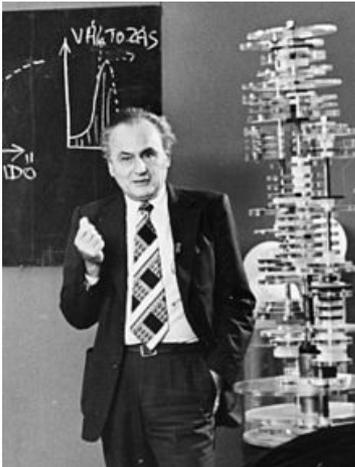
"... [questo *laser*] è una  
soluzione in cerca di un  
problema"

I. d'Haenens a T. H. Maiman (1960)



# Propulsione Laser?

Idea di György Marx  
(1966): laser gigante  
per propulsione da Terra



22

N A T U R E

JULY 2, 1966 Vol. 211

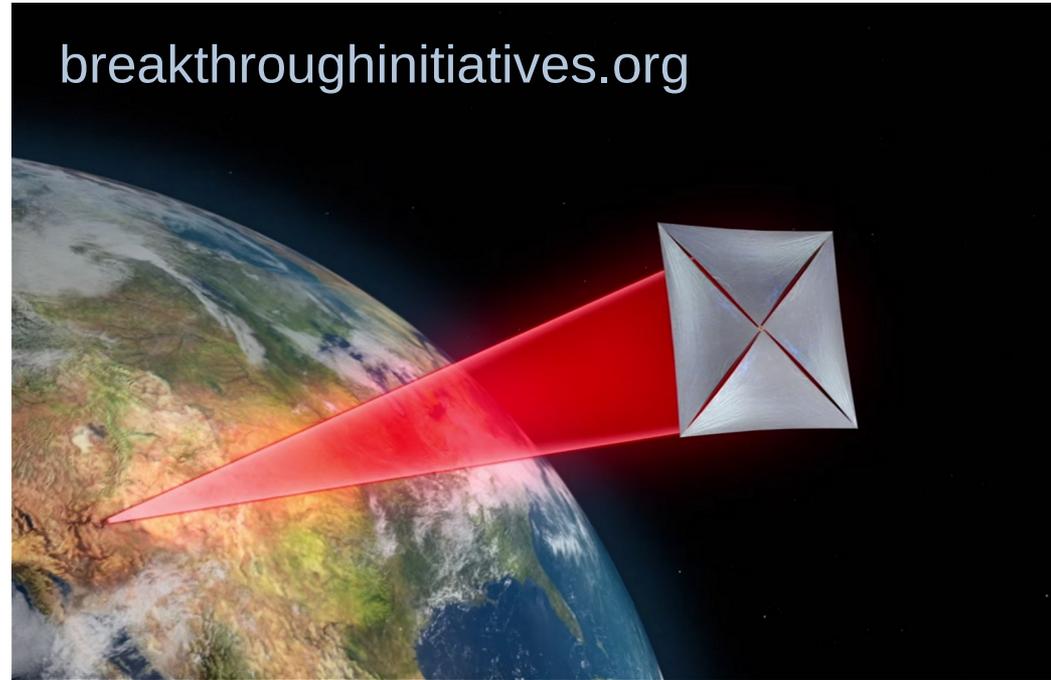
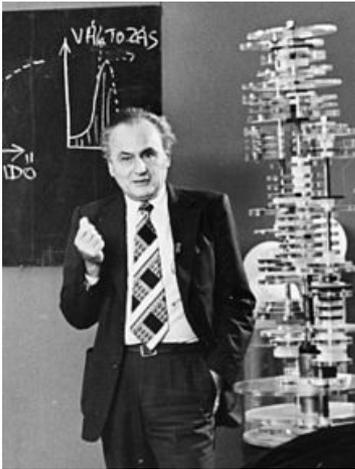
## INTERSTELLAR VEHICLE PROPELLED BY TERRESTRIAL LASER BEAM

By PROF. G. MARX

Institute of Theoretical Physics, Roland Eötvös University, Budapest

# Propulsione Laser?

Idea di György Marx  
(1966) [\*]: laser gigante  
per propulsione da Terra



22

N A T U R E

JULY 2, 1966 Vol. 211

## INTERSTELLAR VEHICLE PROPELLED BY TERRESTRIAL LASER BEAM

By PROF. G. MARX

Institute of Theoretical Physics, Roland Eötvös University, Budapest

[\*] co-accreditato R. L. Forward (1964)

# Breakthrough Starshot (2016)

vele-sonda su  $\alpha$ -Centauri in 20 anni ?



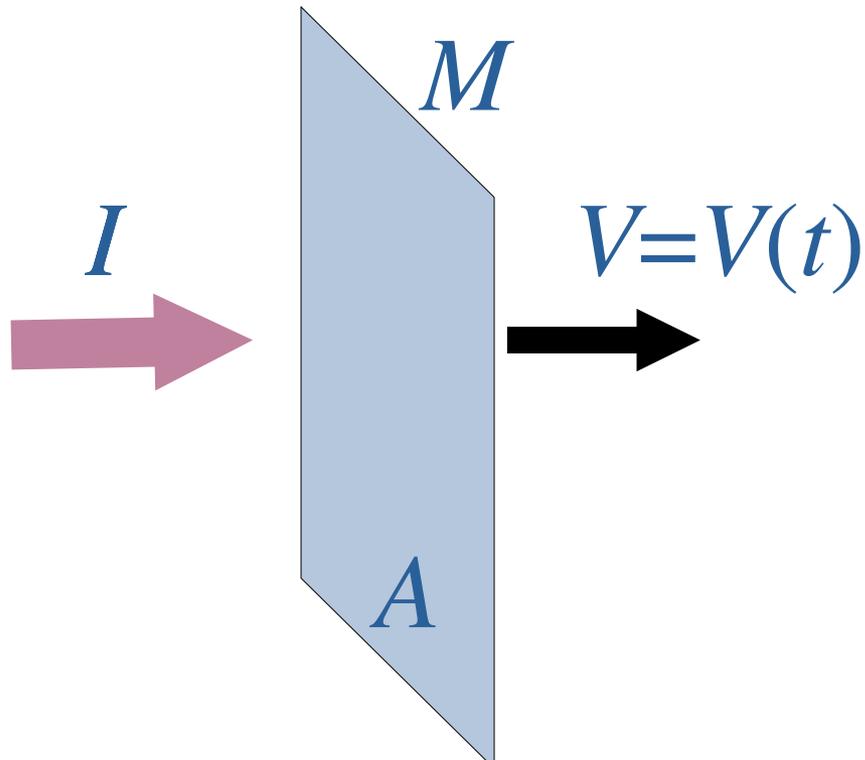
Yuri Milner Freeman Dyson  
Stephen Hawking



Mark Zuckerberg

*Le Scienze*, 21/01/17 e 03/05/2017

# Specchio in Moto Relativistico



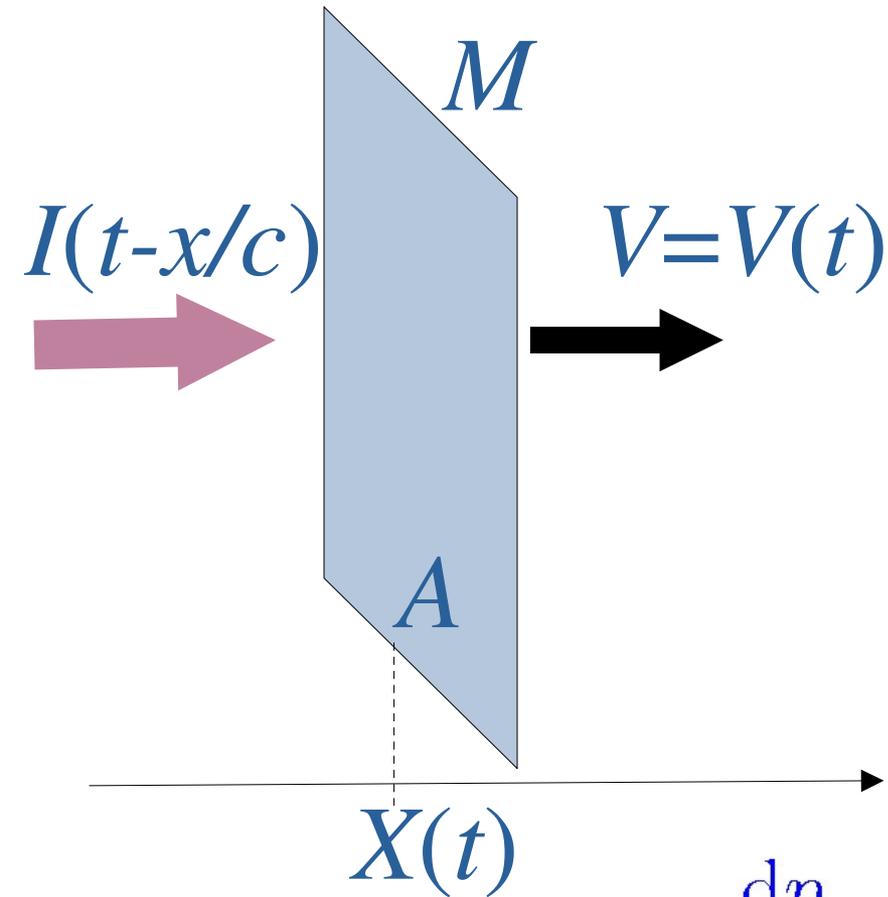
Se  $V$  non è piccola rispetto a  $c$

- usare equazione relativistica del moto
- determinare pressione della luce su specchio in movimento
- ...

$$F = P_L A \quad P_L = P_L(I, V) \neq \frac{2I}{c}$$

$$\frac{dp}{dt} = F \quad V = \frac{pc^2}{E} = \frac{pc^2}{(p^2c^2 + M^2c^4)^{1/2}}$$

# Specchio in Moto Relativistico a Propulsione Laser



Pressione da un impulso ("pacchetto") di luce propagante a velocità  $c$  e con durata finita:

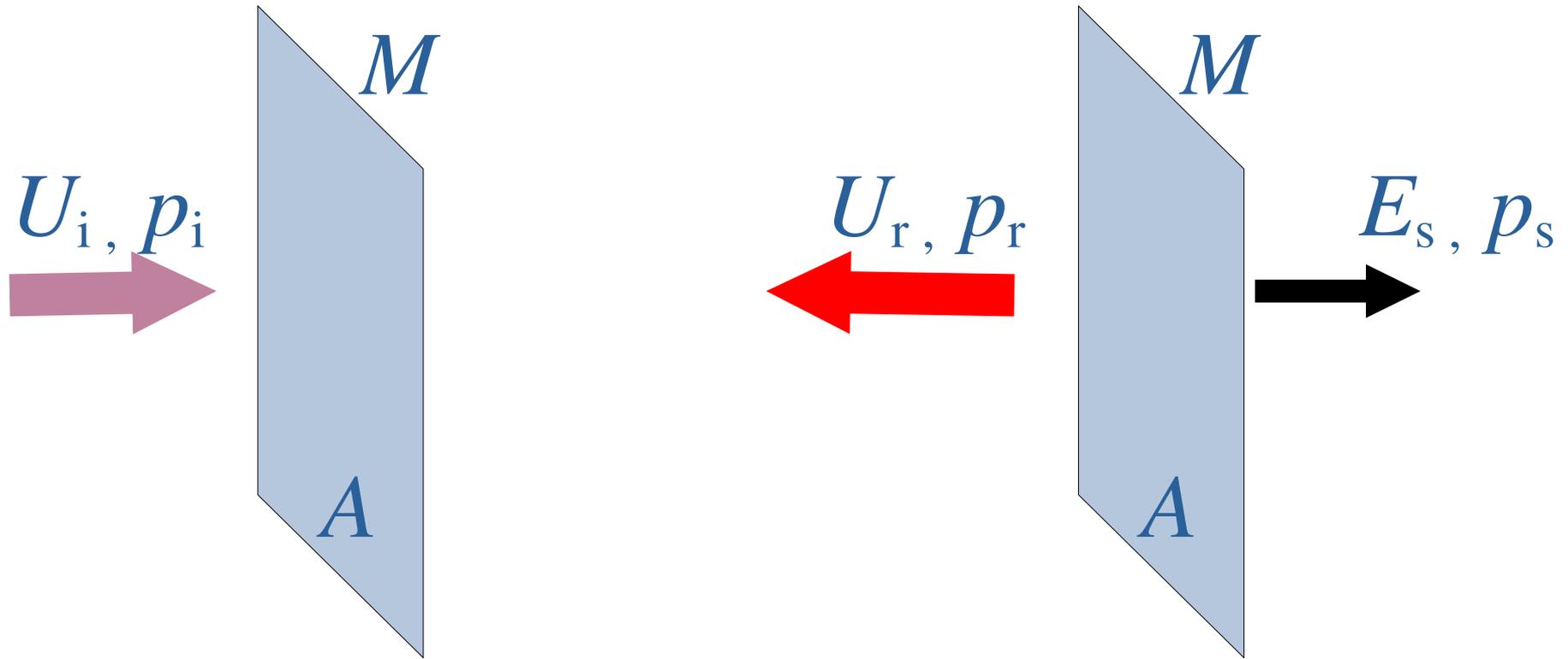
- dilatazione del tempo di interazione (lo specchio "scappa" dall'impulso di luce)

- effetto "ritardo" sulla pressione alla superficie

Equazioni accoppiate:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= F \propto I(t - X(t)/c) \\ \frac{dX}{dt} &= V \end{aligned}$$

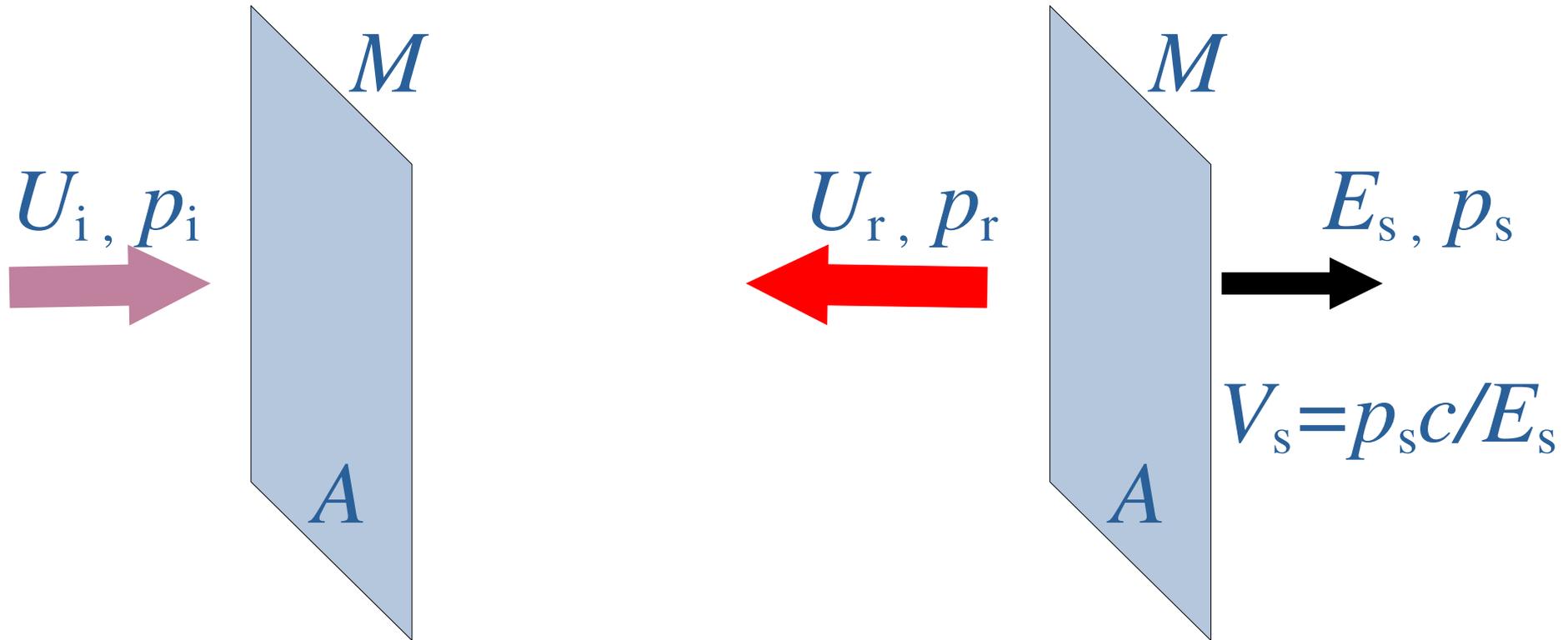
## Calcolo dalle Leggi di Conservazione



$$0 + p_i = p_s - p_r$$
$$Mc^2 + U_i = E_s + U_r$$

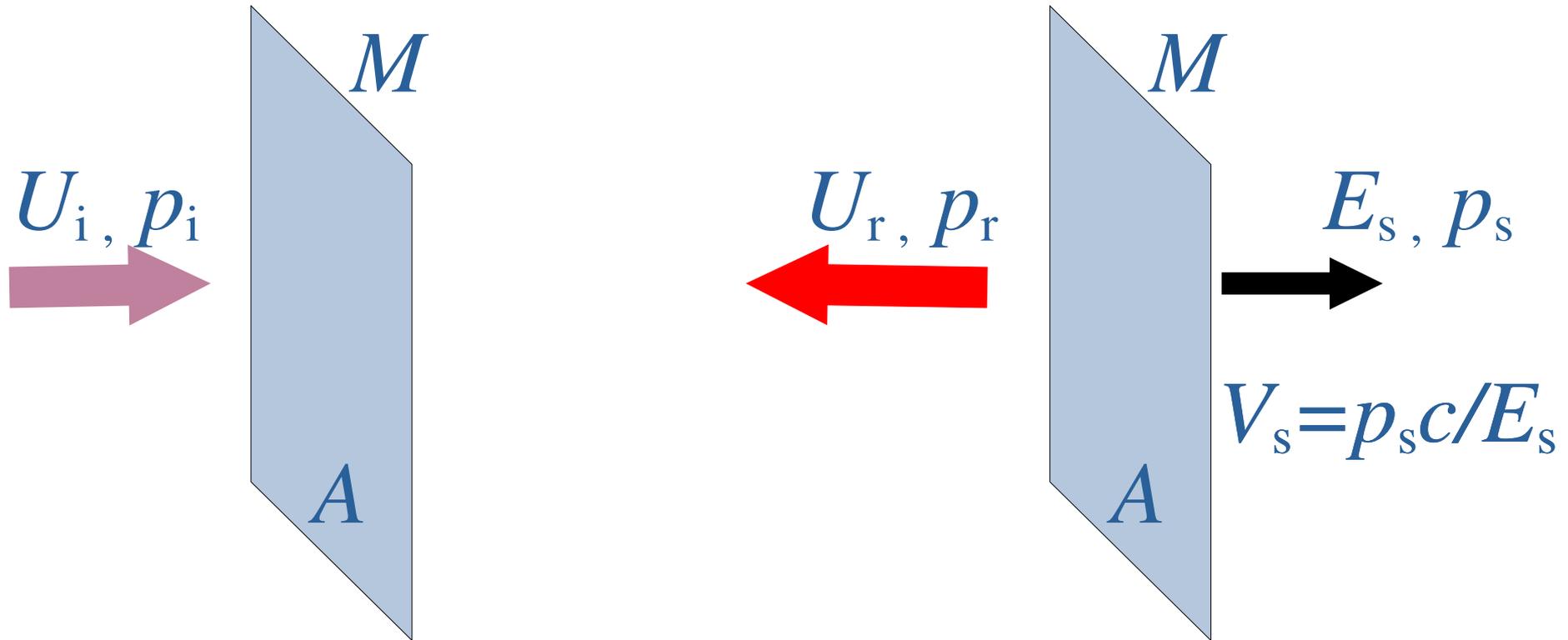
$$U_i = p_i c \quad U_r = p_r c$$
$$E_s = (p_s^2 c^2 + M^2 c^4)^{1/2}$$

## Calcolo dalle Leggi di Conservazione



$$V_s = c \frac{1 + (U_i/Mc^2)}{1 + (U_i/Mc^2) + (Mc^2/2U_i)}$$
$$\simeq \frac{2U_i}{Mc} \quad (U_i \ll Mc^2)$$

## Calcolo dalle Leggi di Conservazione



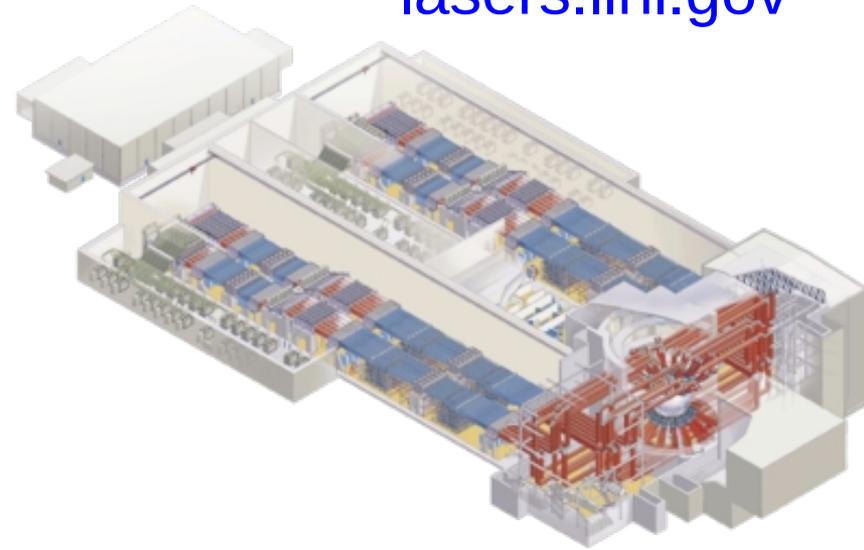
Per  $V_s = 0.3c$  e  $M = 10 \text{ g}$ ,  $U_i \approx 1.35 \times 10^{14} \text{ J}$

# Il Più Grande Laser al Mondo

National Ignition Facility (USA):  
un impulso laser al giorno con  
 $\approx 10^6$  Joule in  $\approx 10^{-9}$  secondi

**Costo:** ~1 miliardo \$ (costruzione)  
~1 milione \$/impulso  
(produzione: ~1 impulso/giorno)

[lasers.llnl.gov](https://lasers.llnl.gov)



13/12/2022

The New York Times

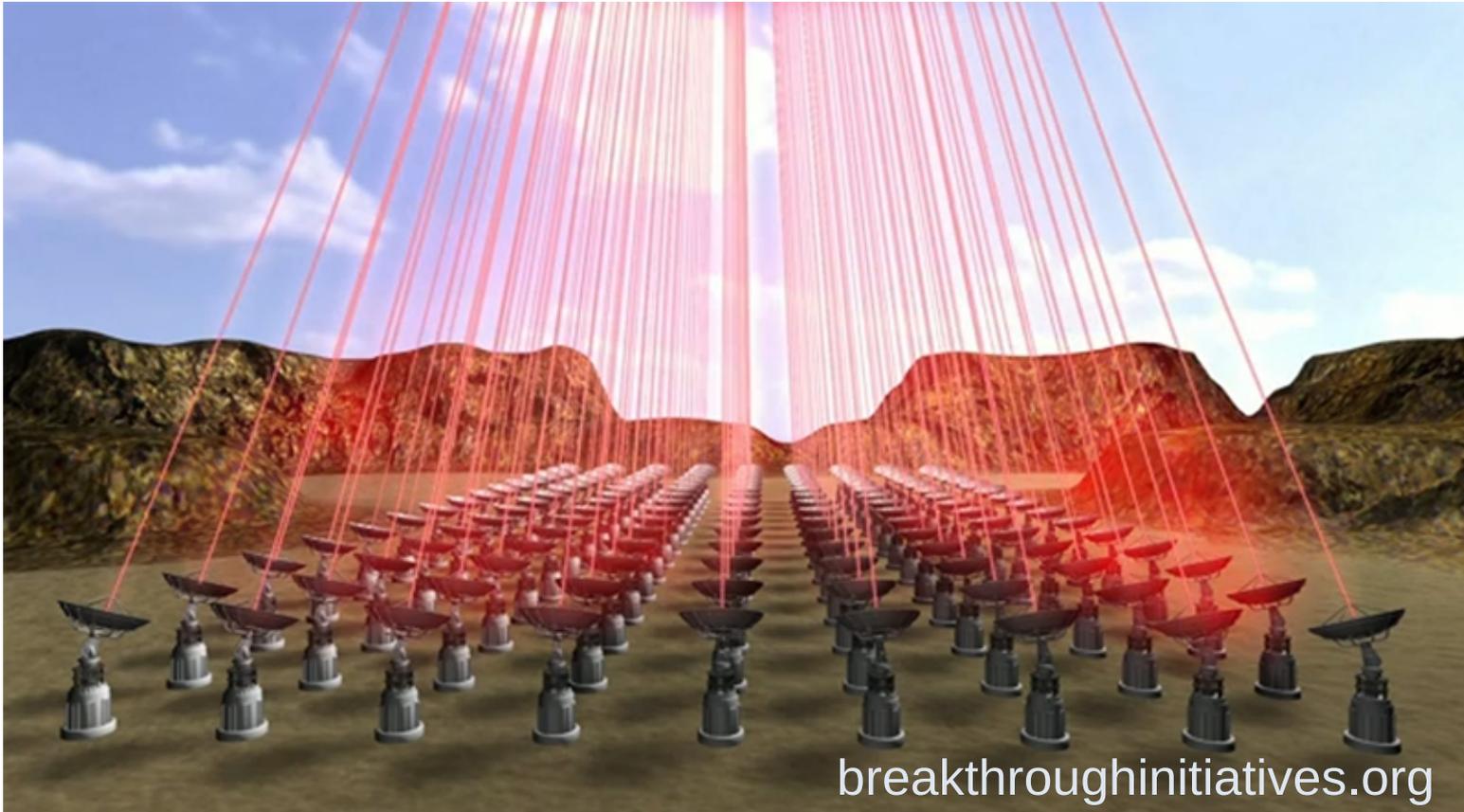
SUBSC

## *Scientists Achieve Nuclear Fusion Breakthrough With Blast of 192 Lasers*

The advancement by Lawrence Livermore National Laboratory researchers will be built on to further develop fusion energy research.

Usato per  
"accendere"  
la Fusione  
Nucleare  
per produrre  
energia

# Un Laser "Troppo Gigante"



Laser per Breakthrough Starshot:  $\approx 10^{13}$  J in  $\approx 10^2$  s  
( $> 1$  milione di volte la scala di NIF)

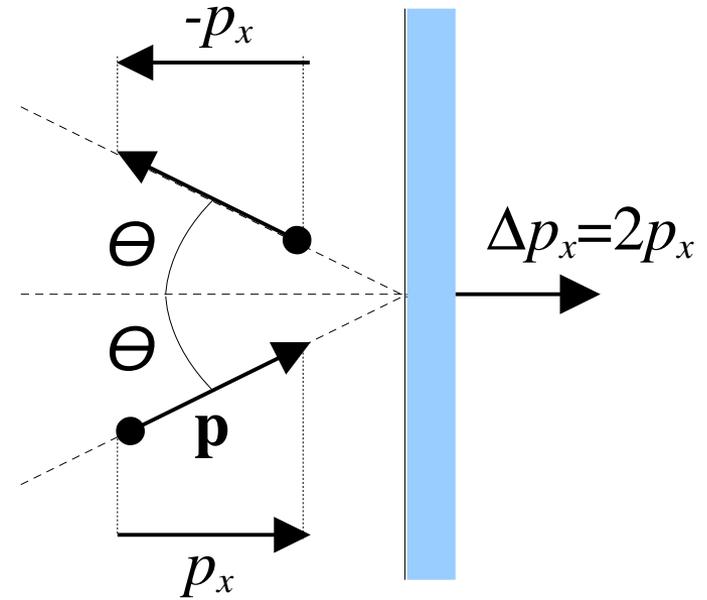
Stima (ottimistica) costo:  $\sim 100$  miliardi \$

H. Milchberg, "Challenges abound for propelling interstellar probes",  
*Physics Today* (April 26, 2016)

# Richiamo: Modello Corpuscolare della Pressione

Una particella con q.d.m  $\mathbf{p}$   
rimbalzante su una parete elastica  
*in quiete* trasferisce una q.d.m.

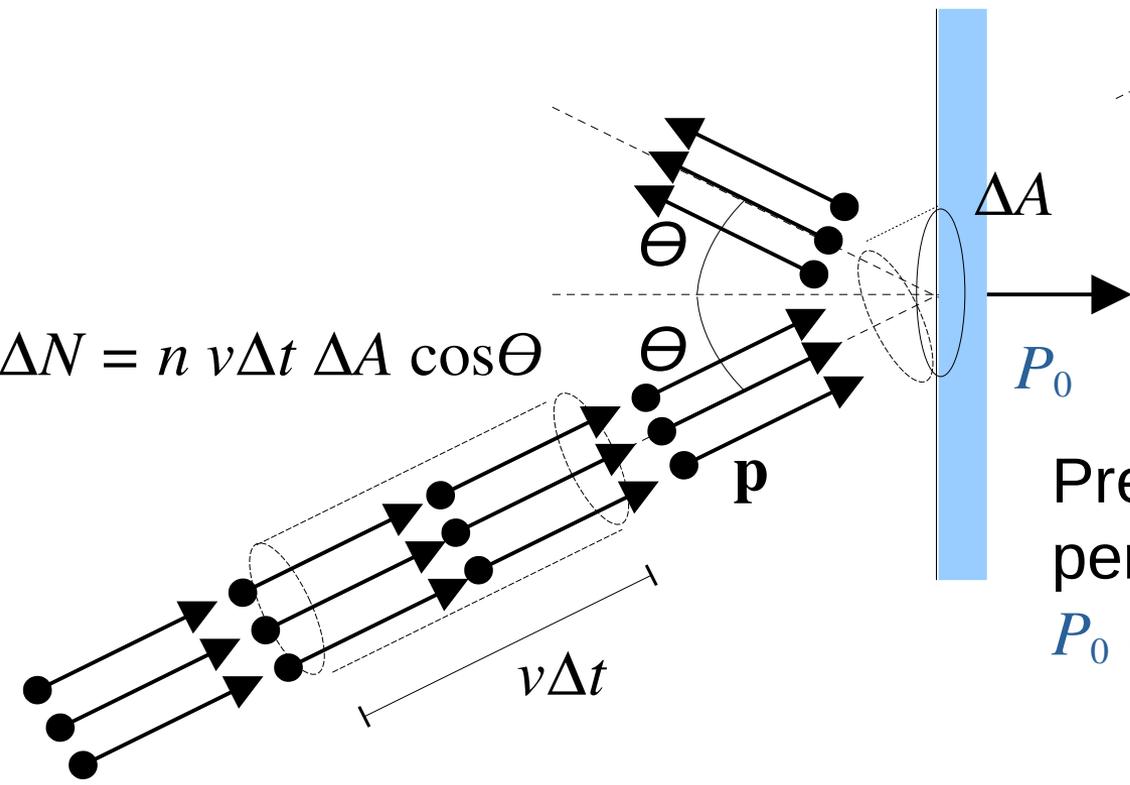
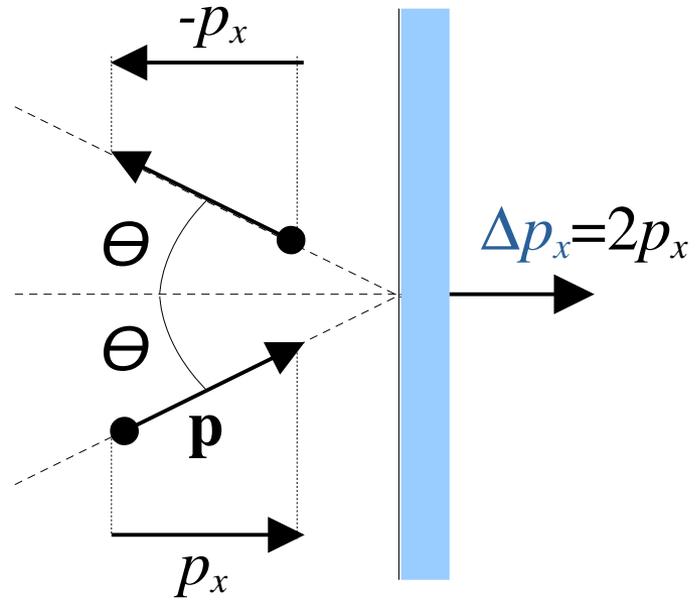
$$\Delta p_x = 2p_x = 2p \cos\theta$$



# Richiamo: Modello Corpuscolare della Pressione

Una particella con q.d.m  $\mathbf{p}$  rimbalzante su una parete elastica *in quiete* trasferisce una q.d.m.

$$\Delta p_x = 2p_x = 2p \cos\theta$$

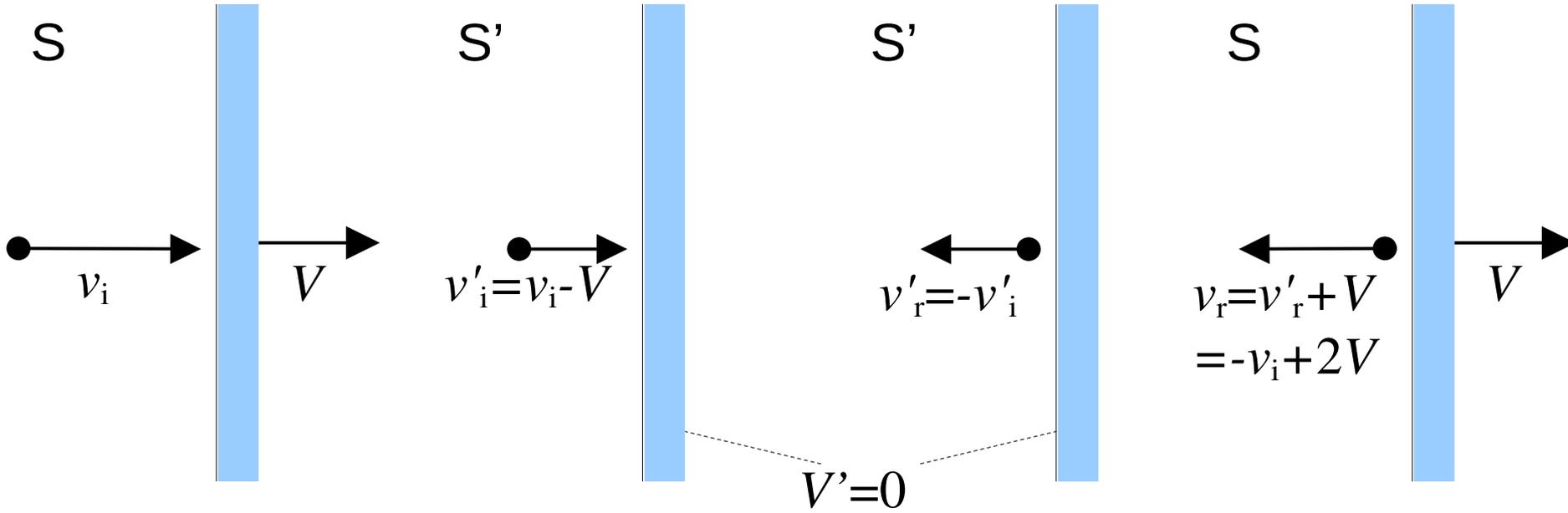


Pressione risultante (forza per unità di superficie)

$$P_0 = \Delta p_{\text{tot}} / (\Delta t \Delta A) \propto \Delta p_x$$

# Rimbалzo su Parete in Moto

(Per semplicità: incidenza normale e particella classica  $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ )  
 L'urto è elastico nel sistema  $S'$  in cui la parete è ferma ( $V'=0$ )

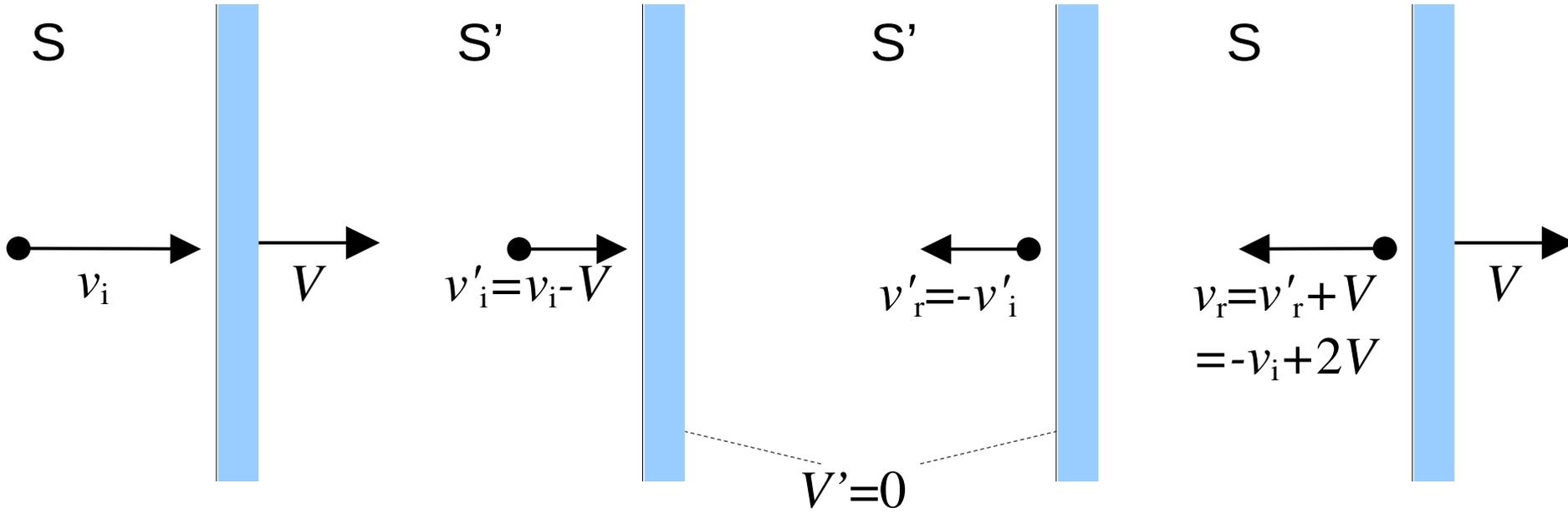


$$\Delta p = m(v_i - v_r) = m(2v_i - 2V) = 2mv_i(1 - V/v_i) = \Delta p_0 (1 - V/v_i)$$

Se  $V > 0 \rightarrow \Delta p < \Delta p_0$

# Rimbalko su Parete in Moto

(Per semplicità: incidenza normale e particella classica  $\mathbf{p}=m\mathbf{v}$ )  
 L'urto è elastico nel sistema  $S'$  in cui la parete è ferma ( $V'=0$ )



$$\Delta p = \Delta p_0 (1 - V/v_i)$$

Se  $V < 0 \rightarrow \Delta p > \Delta p_0$



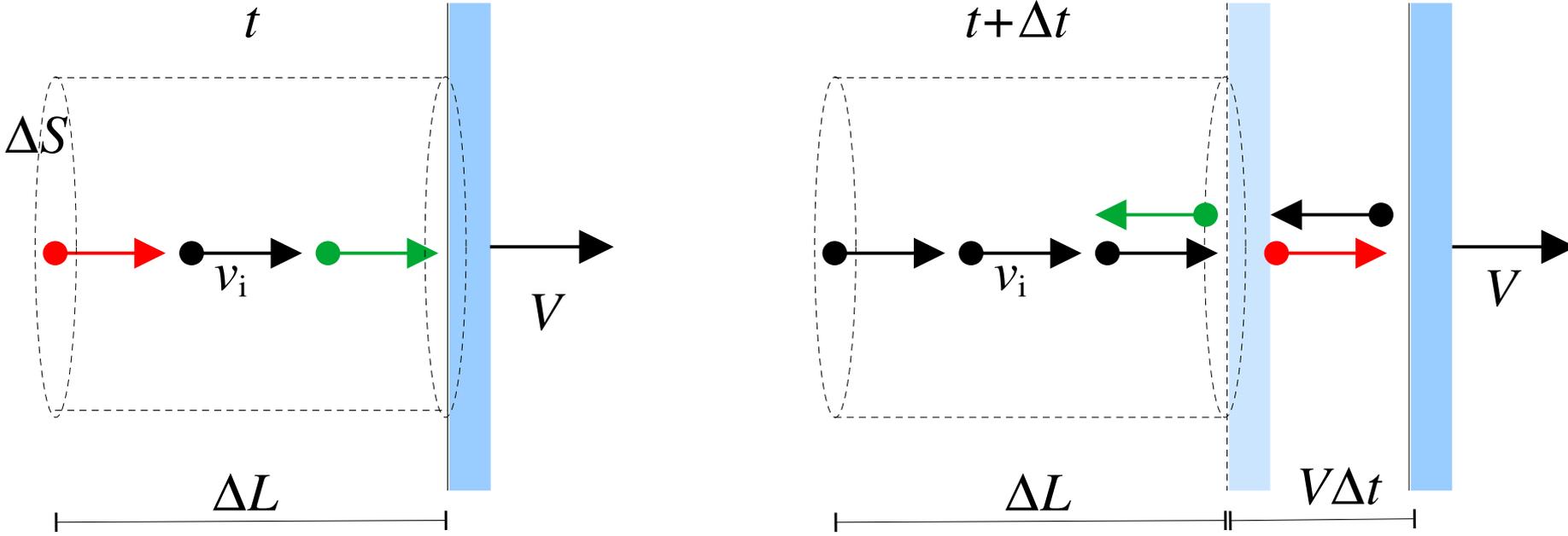
*"Let your Tennis racket do the work!"*

<https://www.playtennis.sg/online-tennis-education/>

# Effetto "di fuga" della parete

Le particelle che rimbalzano nell'intervallo  $\Delta t$  sono comprese in un cilindro di lunghezza  $\Delta L = v_i \Delta t - V \Delta t = v_i \Delta t (1 - V/v_i) = \Delta L_0 (1 - V/v_i)$

$$\Delta N = n \Delta S \Delta L = \Delta N_0 (1 - V/v_i)$$



$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\Delta p \Delta N}{\Delta t \Delta S} = \frac{\Delta p_0 \Delta N_0}{\Delta t \Delta S} \left(1 - \frac{V}{v_i}\right)^2 \\
 &= P_0 \left(1 - \frac{V}{v_i}\right)^2 \simeq P_0 \left(1 - 2\frac{V}{v_i}\right) \quad (V \ll v_i)
 \end{aligned}$$

# Esempio: Moto dello Specchio $\sim O(V/c)$

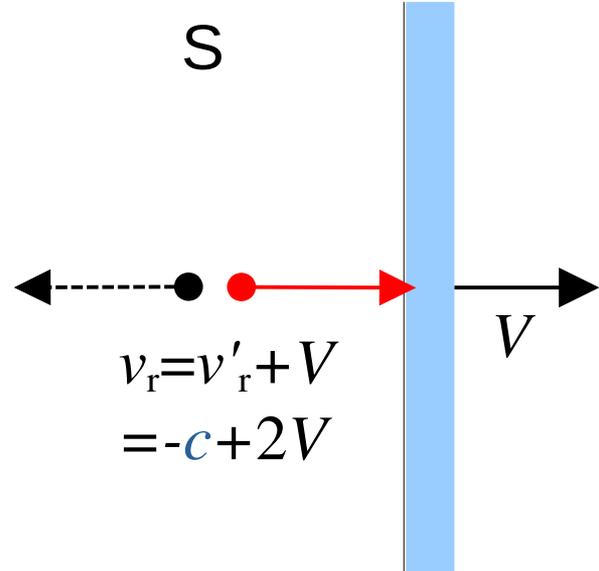
Specchio in moto da fermo spinto da luce con  $I$  costante per  $t > 0$ :

$$P \simeq \frac{2I}{c} \left( 1 - \frac{2V}{c} \right)$$

$$M \frac{dV}{dt} = \frac{2IA}{c} \left( 1 - \frac{2V}{c} \right) = -\frac{4IA}{c^2} \left( V - \frac{c}{2} \right)$$

$$V(t) = \frac{c}{2} \left( 1 - e^{-t/\tau} \right) \quad \tau \equiv \frac{Mc^2}{4IA} \quad [V(0) = 0]$$

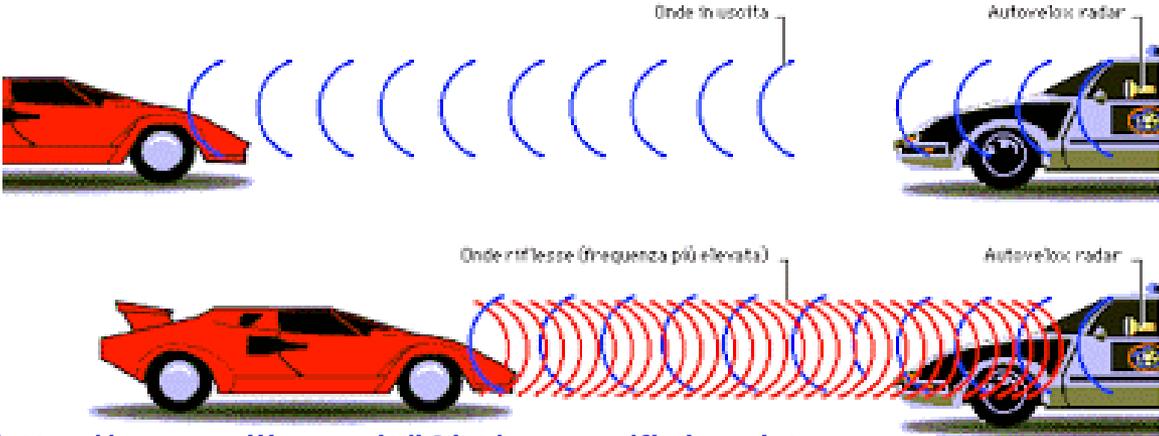
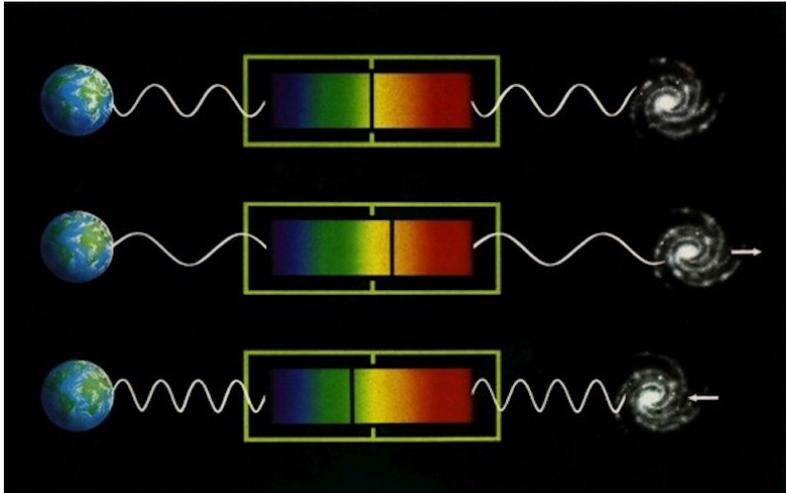
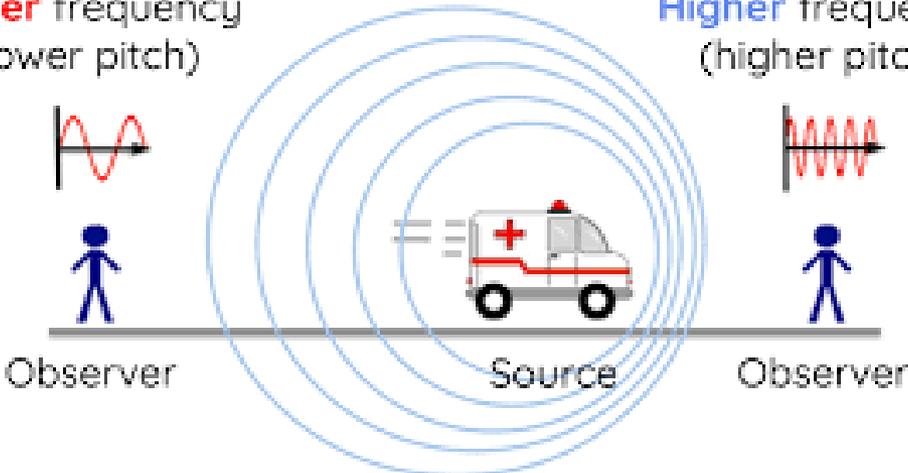
"Saturazione" a  $c/2$  quando  $v_r > 0$



# Effetto Doppler

Lower frequency  
(lower pitch)

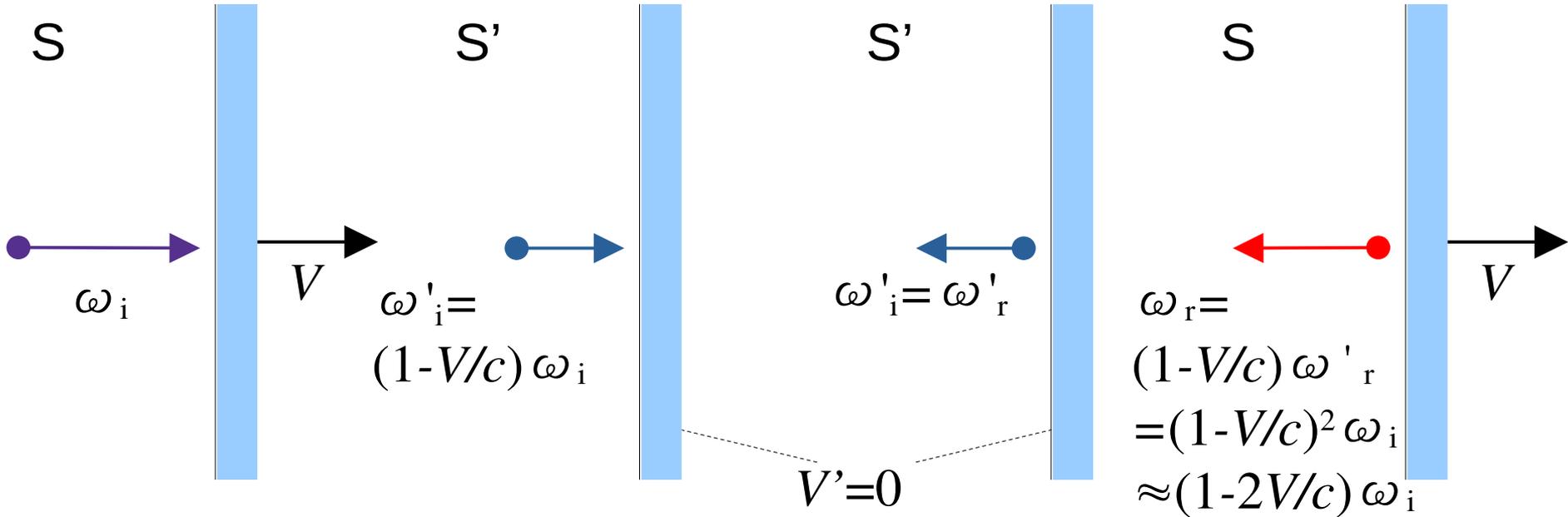
Higher frequency  
(higher pitch)



# Doppio Effetto Doppler in Specchio in Moto

Cambio di frequenza tra S e S'

Relazione di Planck-Einstein  $p = h\omega/c$



$$\Delta p = p_i - p_r = \hbar\omega_i/c + \hbar\omega_r/c = (\hbar\omega_i/c)(1 + 1 - 2V/c) = 2(\hbar\omega_i/c)(1 - V/c) = \Delta p_0 (1 - V/c)$$