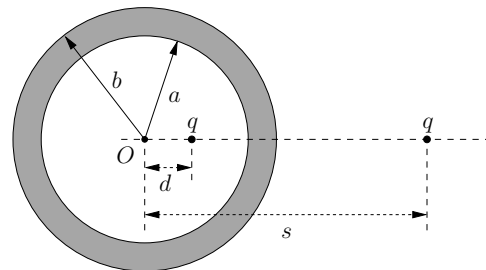


Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2010-2011

Compito di Fisica 2 (17/01/2011)

1

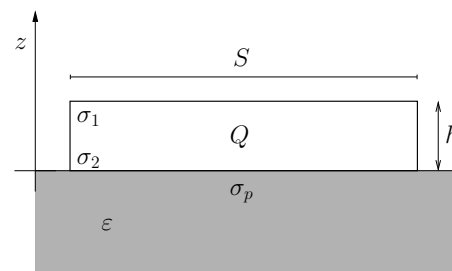
Due cariche puntiformi identiche q sono poste lungo una retta passante per il centro di un guscio conduttore, l'una all'interno e l'altra all'esterno, a distanze rispettivamente d e s dal centro. I raggi interno ed esterno del guscio valgono a e b (quindi $d < a < b < s$). Il guscio è isolato e scarico.



- a) Determinare, usando il metodo delle cariche immagine, la soluzione del problema del potenziale. (10 punti)
b) Scrivere la forza agente su ciascuna carica. (5 punti)

2

Una lastra conduttrice piana è appoggiata sulla superficie di un materiale con permittività dielettrica ε che riempie il semispazio $z < 0$. L'area della superficie di contatto è S e lo spessore della lastra è $h \ll \sqrt{S}$. La lastra possiede la carica libera totale Q . Gli effetti di bordo sono assunti trascurabili. Calcolare



- a) le densità superficiali di carica libera sulle superfici superiore (σ_1) e inferiore (σ_2) della lamina, la densità di carica di polarizzazione alla superficie del dielettrico (σ_p) ed il campo elettrico nelle regioni sopra ($z > h$) e sotto ($z < 0$) la lastra; (10 punti)
b) la forza agente sulla lastra. (5 punti)

3

Un condensatore cilindrico ha raggio interno a ed esterno b ed altezza praticamente infinita. Lo spazio tra le due armature è riempito da un liquido con permittività dielettrica ε e conducibilità σ .

- a) Se la differenza di potenziale tra le armature è mantenuta costante, con valore V_0 , da un opportuno generatore, calcolare la densità di carica per unità di lunghezza λ dell'armatura interna, il campo elettrico $\mathbf{E}$ e la densità di corrente $\mathbf{J}$ nel liquido in condizioni stazionarie. (8 punti)
b) Il condensatore viene sconnesso dal generatore a $t = 0$: calcolare la legge temporale con cui si scarica. (7 punti)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Per il punteggio verranno valutate le **4 risposte migliori** (ovvero i 4 punteggi parziali più alti sull'insieme delle domande).

FORMULE UTILI

Soluzione del problema del potenziale per carica puntiforme Q a distanza $L > R$ dal centro di una sfera conduttrice di raggio R posta a terra: si pone una carica immagine $Q' = -(R/L)Q$ a distanza $L' = R^2/L$ dal centro.

Equazioni dell'elettrostatica nei dielettrici (ρ_{lib} densità di carica volumica libera)

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot (\varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_{\text{lib}}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0. \quad (1)$$

Relazione tra $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, la polarizzazione $\mathbf{P}$ e le densità di carica di polarizzazione volumica ρ_{pol} e superficiale σ_{pol}

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad \chi = \varepsilon_r - 1, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{\text{pol}}, \quad \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{\text{pol}}, \quad (3)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore perpendicolare alla superficie del dielettrico, in direzione uscente.

Legge di Ohm locale in un conduttore (σ_Ω conducibilità, ρ_Ω resistività)

$$\mathbf{J} = \sigma_\Omega \mathbf{E} = \frac{1}{\rho_\Omega} \mathbf{E} \quad (4)$$

Equazione di continuità per la carica elettrica (ρ densità di carica volumica)

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (5)$$

ovvero in forma integrale, per un volume V racchiuso dalla superficie S

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = - \int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (6)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore perpendicolare a dS in direzione uscente.

SOLUZIONI

1

a) Si risolve il problema trattando separatamente

1. la parte di spazio esterna alla sfera di raggio b .
2. il guscio sferico $a < r < b$, e
3. l'interno della sfera di raggio a .

Abbiamo i seguenti risultati

1. Se la sfera fosse scarica il problema sarebbe risolto sommando al potenziale generato dalla carica esterna quello generato da due cariche immagine, allineate con le cariche reali, una di valore $q' = -\frac{b}{s}q$ posta a distanza $s' = \frac{b^2}{s}$ da O , e una di valore $-q'$ posta in O . Data la presenza di una carica q all'interno della sfera, dobbiamo porre in O una carica $q - q'$ anziché $-q'$. Prendendo il potenziale uguale a zero all'infinito, sulla superficie sferica di raggio b avremo

$$V(b) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b}(q - q') = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 b} \frac{s+b}{s} q. \quad (7)$$

2. All'interno di un conduttore il potenziale è costante, quindi, per continuità, abbiamo $V(r) = V(b)$ per $a \leq r \leq b$.
3. Siamo all'interno di una gabbia di Faraday, quindi non vediamo la carica esterna. Il potenziale elettrico, a parte una costante additiva da determinare per continuità, sarà equivalente alla somma del potenziale generato dalla carica a distanza d dal centro della sfera più quello generato dalla sua carica immagine, di valore $q'' = -\frac{a}{d}q$ posta all'esterno della sfera di raggio a , a distanza $d' = \frac{a^2}{d}$ dal centro della sfera. Al potenziale generato da queste due cariche, che è nullo sulla sfera di raggio a se non fissiamo una costante additiva, dobbiamo sommare $V(b)$.

b) La carica esterna viene attratta sia dalla carica q' posta in b^2/s che dalla carica centrale $q + q'$, avremo quindi

$$f_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q^2 \left(\frac{s+b}{s} \right)}{s^2} - \frac{q^2 \frac{b}{s}}{\left(s - \frac{b^2}{s} \right)^2} \right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{s+b}{s^3} - \frac{sb}{(s^2 - b^2)^2} \right]. \quad (8)$$

La carica interna viene attratta solo dall'immagine q'' , quindi

$$f_{\text{int}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{a}{d} \frac{1}{\left(\frac{a^2}{d} - d \right)^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ad}{a^2 - d^2}. \quad (9)$$

2

a) Poiché all'interno della lastra conduttrice deve essere $E = 0$, le densità *totali* di carica superficiale alle due superfici della lastra devono essere uguali. Dette σ_1 e σ_2 le densità di carica *libera* sulle facce superiore ed inferiore, rispettivamente, e σ_p la densità di carica *di polarizzazione* alla superficie di contatto, si hanno le relazioni

$$\sigma_1 + \sigma_2 = Q/S, \quad \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_p. \quad (10)$$

Nel dielettrico il campo è $\mathbf{E}_d = -\hat{\mathbf{z}}(\sigma_2 + \sigma_p)/\varepsilon_0$ e quindi la polarizzazione è $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}_d$ con $\chi = \varepsilon_r - 1$. Quindi poiché $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \sigma_p$ otteniamo l'ulteriore relazione

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}_d \cdot \hat{\mathbf{z}} = -(\sigma_2 + \sigma_p)/\varepsilon_0, \quad (11)$$

da cui otteniamo

$$\sigma_p = -\chi\sigma_2/(1 + \chi) = -\chi\sigma_2/\varepsilon_r. \quad (12)$$

Alla stessa relazione si arriva notando che nel dielettrico $D = \sigma_2$ ed essendo $E = D/\varepsilon$ si ottiene $\sigma_p = -P = -\varepsilon_0\chi E = -\chi\sigma_2/\varepsilon_r$. Dalle (10-12) si ottiene

$$\sigma_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{S}, \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{S}, \quad \sigma_p = \frac{1 - \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{S}, \quad (13)$$

e per i campi elettrici $E_1 = \sigma_1/\varepsilon_0$, $E_2 = \sigma_2/(\varepsilon_0\varepsilon_r) = E_1$ come deve visto che il campo è nullo nel conduttore.

Come procedimento alternativo si può richiamare il problema della carica immagine di fronte ad un semispazio dielettrico; in questo modo si ottiene che i campi generati nella regione di vuoto ($z > 0$) sono quelli generati dai piani carichi con densità superficiali σ_1 e σ_2 , più due piani "immagine" in posizione simmetrica rispetto alla superficie di separazione con densità

$$\sigma'_1 = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\sigma_1, \quad \sigma'_2 = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\sigma_2. \quad (14)$$

Il campo totale generato nel conduttore, che deve essere nullo, è dato da

$$E_{\text{cond}} = (-\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma'_1 + \sigma'_2)/\varepsilon_0 \doteq 0 \quad (15)$$

da cui si ricava $\sigma_1 = \sigma_2/\varepsilon_r$ e di qui usando la prima delle (10) si torna al risultato precedente.

b) La forza totale è la somma delle pressioni elettrostatiche sulle superficie superiore e inferiore, moltiplicata per l'area delle superfici:

$$F = \frac{1}{2}(E_1\sigma_1 - E_2\sigma_2) = \frac{E_1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2}{\varepsilon_r} \right) S = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \frac{1 - \varepsilon_r}{(1 + \varepsilon_r)^2}. \quad (16)$$

Poiché $1 - \varepsilon_r < 0$ la forza è attrattiva, ovvero tende a far aderire la lastra conduttrice al dielettrico.

3

a) Il campo elettrico dipende dalla densità lineare di carica λ secondo la formula, ottenuta dal teorema di Gauss

$$E = E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}, \quad \text{per } a < r < b, \quad (17)$$

da cui abbiamo per il potenziale elettrico

$$V_0 = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (18)$$

per cui $\lambda = \frac{2\pi\epsilon V_0}{\ln(b/a)}$.

La densità di corrente è anch'essa banalmente radiale e vale $J = \sigma E$.

Si è assunto consistentemente che la densità di carica volumica sia nulla e che le condizioni siano stazionarie quindi $\nabla \cdot \mathbf{J} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ per $r > a$.

b) Applichiamo la legge della conservazione della carica ponendo il flusso della corrente su un cilindro coassiale posto tra le due armature, di altezza h , uguale alla variazione della carica in esso contenuta

$$\Phi(\mathbf{J}) = 2\pi r h J(r) = 2\pi r h \sigma E = 2\pi r h \sigma \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \doteq -\frac{dQ}{dt} = -h\partial_t \lambda, \quad (19)$$

da cui l'equazione e la sua soluzione

$$\partial_t \lambda = -\frac{\lambda}{\tau}, \quad \lambda(t) = \lambda(0)e^{-t/\tau}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}. \quad (20)$$